

1 Matrices

Propuesta A

1. Un taller de aluminio fabrica tres modelos distintos de ventanas: A , B y C , en dos versiones distintas: grande y pequeña. El taller produce diariamente 100 ventanas grandes y 800 pequeñas de tipo A , 800 grandes y 600 pequeñas de tipo B , y 400 grandes y 600 pequeñas de tipo C . Cada ventana grande lleva 24 junquillos y 10 remaches, y cada ventana pequeña lleva 12 junquillos y 8 remaches, en cualquiera de los tres modelos.
- a) Representa esta información en dos matrices.
- b) Halla una matriz que represente la cantidad de junquillos y de remaches necesarios para la producción diaria de ventanas de dicha fábrica.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, realiza las siguientes operaciones:

$$AB, C^t A, (BC - BA)^t$$

3. Resuelve la ecuación matricial $AXB = C$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

- a) Calcula A^n .
- b) Calcula, si existe, A^{-1} .
- c) Resuelve la siguiente ecuación matricial: $A^n + BX = I$.

5. Escribe una matriz cuadrada de orden 4 cuyas dos primeras filas sean $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, de manera que:

- a) $\text{rg}(A) = 2$
- b) $\text{rg}(A) = 3$
- c) $\text{rg}(A) = 4$

Justifica la respuesta.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, determina los valores de m para los que existe A^{-1} .

Calcula A^{-1} para $m = 0$.

7. Estudia según los valores de k el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix}$$

Propuesta B

1. Efectúa la siguiente operación con matrices: $3A - AB + C^t$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, los siguientes productos:
 ABC , BCA y BAC

3. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^3 - 3A^2 + 3A$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Razona para qué valores de k la matriz $B^t A^t$ tiene inversa.

b) Resuelve la ecuación $(AB)^t X = I$ para $k = 0$, siendo I la matriz identidad.

5. Dados los siguientes vectores de \mathbf{R}^4 :

$$\vec{u} = (m, -1, 0, 1), \vec{v} = (0, m, -1, 1) \text{ y } \vec{w} = (1, 0, -1, 2),$$

calcula los valores de m para los que dichos vectores son linealmente independientes.

6. Obtén las matrices A y B que cumplen las siguientes condiciones:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

7. Determina, razonadamente, la matriz $A^{20} - A^{10}$ sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Halla la matriz inversa de la siguiente matriz por el método de Gauss-Jordan y comprueba el resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluciones propuesta A

1. a)
$$\begin{matrix} & G & P & & J & R \\ A & \begin{pmatrix} 100 & 800 \\ 800 & 600 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} & & G & \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 100 & 800 \\ 800 & 600 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{matrix} A & \begin{pmatrix} 12000 & 7400 \\ 26400 & 12800 \\ 16800 & 8800 \end{pmatrix} \\ B & \\ C & \end{matrix}$$

2.
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 13 \\ 3 & 0 & -9 \\ 9 & -4 & -23 \end{pmatrix}$$

$$C^t A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 22 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(BC - BA)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & -28 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -24 & 10 \\ 14 & -4 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 25 & -14 \\ -38 & 21 \end{pmatrix}$$

3.
$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 4 & 16 \\ -18 & -4 & 13 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se demuestra por inducción:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(n+1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = I \Rightarrow \begin{cases} b = d = f = g = h = 0 \\ a = e = i = 1 \\ c = -2i = -2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$A^n + BX = I \Rightarrow X = B^{-1}(I - A^n)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2n \end{pmatrix}$$

5. a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow mF_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & -m^2 + 4m - 3 \end{pmatrix}$$

$$-m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1, m = 3$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$, $\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow A$ tiene inversa.

Si $m = 0$:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g = i = 0 = c; h = b = \frac{1}{3} \\ a = 1 \\ d = -4, e = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

7.
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & k+2 & 2 & 2 \\ 0 & k+2 & k & k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & k+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 & k-2 \end{pmatrix}$$

$k = 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ya que la tercera fila sería 0 y las dos primeras no serían proporcionales.

$k = -2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ya que en este caso las filas segunda y tercera serían proporcionales y no lo serían la primera y la segunda.

$k \neq 2$ y $k \neq -2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

Soluciones propuesta B

1.

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 7 & -2 & 3 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 14 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

2. $ABC = \begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 36 & -8 \end{pmatrix}$

$$BCA = \begin{pmatrix} -20 & -52 & 84 \\ -6 & 6 & -18 \\ -19 & -17 & 15 \end{pmatrix}$$

BAC no se puede realizar, ya que BA tiene dimensión 3×3 y C tiene dimensión 2×2 .

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. a) $B^t A^t = \begin{pmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

Para que $B^t A^t$ tenga inversa es necesario que $\text{rg}(B^t A^t) = 2$, para lo cual hace falta que sus filas no sean proporcionales; por tanto,

$$\frac{2k-1}{3} \neq \frac{k}{k+2} \Rightarrow 2k^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 1$$

b) $(AB)^t X = I \Rightarrow X = (B^t A^t)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, & b = 0 \\ c = \frac{3}{2}, & d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. $\text{rg}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{rg} \begin{pmatrix} m & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$

$$\begin{pmatrix} m & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \leftrightarrow F_3 \\ F_3 \rightarrow F_3 - mF_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & -1 & m & 1-2m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 \leftrightarrow F_3 \\ F_3 \rightarrow F_3 + mF_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & m & 1-2m \\ 0 & 0 & (m+1)(m-1) & (2m+1)(1-m) \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $m = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$.

Si $m \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes.

6.

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A + 4B = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \\ 6A - 9B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -18 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ A = \frac{1}{2} \left(3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{20} - 2A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Aplicando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \rightarrow F_1 + 2F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 + 2F_3 \\ F_3 \rightarrow -F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Determinantes

Propuesta A

1. Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x+a & x-a \\ x-a & x+a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & a-1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix}$

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 4$, calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2k & 4c+2f & 3f+k \\ 2h & 4b+2e & 3e+h \\ 2g & 4a+2d & 3d+g \end{vmatrix}$.

3. Demuestra que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen} \beta & \operatorname{sen} \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(\beta - \gamma) + \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.

4. Expresa en forma de producto de factores primos de primer grado el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & d+e & de \\ 1 & e+c & ec \\ 1 & c+d & cd \end{vmatrix}$$

5. Obtén en función de a , b y c el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$$

6. Utiliza determinantes para calcular, según los valores de k , el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix}$$

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, determina los valores de m para los cuales existe A^{-1} .

Calcula A^{-1} para $m = 0$.

8. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Propuesta B

1. Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{cos} \alpha \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x+a & x-a \\ x-a & x-a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$

2. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$, sabiendo que $\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -k \end{vmatrix} = 100$.

3. Calcula el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} \\ e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} & e^{\pi} + 2e^{-\pi} \end{vmatrix}$.

4. a) Calcula los valores de k que anulan el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 3k+1 & k & k \\ 6k+2 & 2k+1 & 2k \\ 3k+1 & k & k+1 \end{vmatrix}$.

b) Halla los valores de k para los que la matriz $A(k) = \begin{pmatrix} 3k+1 & k & k \\ 6k+2 & 2k+1 & 2k \\ 3k+1 & k & k+1 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Calcula, si es posible, la inversa de $A(0)$.

5. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcula el valor de $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$.

6. Discute según el valor del parámetro m el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & m \\ m+2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. a) Encuentra los valores de k para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & -1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es invertible.

b) Para $k = 2$, halla la inversa de A y comprueba el resultado.

8. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

Soluciones propuesta A

1. a) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

b) $\begin{vmatrix} x+a & x-a \\ x-a & x+a \end{vmatrix} = (x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & a-1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(1-a) = (1-a)^3$

2. $\begin{vmatrix} 2k & 4c+2f & 3f+k \\ 2h & 4b+2e & 3e+h \\ 2g & 4a+2d & 3d+g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k & 4c & 3f \\ 2h & 4b & 3e \\ 2g & 4a & 3d \end{vmatrix} +$

$\begin{vmatrix} 2k & 4c & k \\ 2h & 4b & h \\ 2g & 4a & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2k & 2f & 3f \\ 2h & 2e & 3e \\ 2g & 2d & 3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2k & 2f & k \\ 2h & 2e & h \\ 2g & 2d & g \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 4 \cdot 3 \begin{vmatrix} k & c & f \\ h & b & e \\ g & a & d \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 24 \begin{vmatrix} k & h & g \\ c & b & a \\ f & e & d \end{vmatrix} =$

$= -24 \begin{vmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix} = -24 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -96$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen} \beta & \operatorname{sen} \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} =$
 $= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \beta & \operatorname{sen} \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen} \gamma \\ \cos \alpha & \cos \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen} \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix} =$
 $= (\operatorname{sen} \beta \cos \gamma - \cos \beta \operatorname{sen} \gamma) -$
 $-(\operatorname{sen} \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \operatorname{sen} \gamma) +$
 $+(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) =$
 $= \operatorname{sen}(\beta - \gamma) - \operatorname{sen}(\alpha - \gamma) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$
 $= \operatorname{sen}(\beta - \gamma) + \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

4. $\begin{vmatrix} 1 & d+e & de \\ 1 & e+c & ec \\ 1 & c+d & cd \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} F_3-F_1 \\ F_2-F_1 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & d+e & de \\ 0 & c-d & e(c-d) \\ 0 & c-e & d(c-e) \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} c-d & e(c-d) \\ c-e & d(c-e) \end{vmatrix} = (c-d)(c-e) \begin{vmatrix} 1 & e \\ 1 & d \end{vmatrix} =$

$= (c-d)(c-e)(d-e)$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} F_4-F_1 \\ F_3-F_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} =$

$= -1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -abc$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & k+9 & k \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ k & 5 & 2 \\ k-4 & k+9 & k \end{vmatrix} = -3k^2 + 12 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2, k \neq -2$

Si $k \notin \{-2, 2\} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$

Si $k \in \{-2, 2\} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}$

Si $m \notin \{1, 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A$ tiene inversa.

Si $m = 0 \Rightarrow |A| = -3$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$

$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} C_4-C_3 \\ C_3-C_2 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x^2-x & x^3-x^2 \\ 3 & 2x-2 & x^2-1 & 2x^2-2x \\ 3 & x-1 & x-1 & x-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -(x-1) \begin{vmatrix} x-1 & x(x-1) & x^2(x-1) \\ 2(x-1) & (x+1)(x-1) & 2x(x-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -(x-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2 & x+1 & 2x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$

$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \end{smallmatrix}]{C_3-C_2} -(x-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x^2-x \\ 2 & x-1 & x-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -(x-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Soluciones propuesta B

1. a) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

b) $\begin{vmatrix} x+a & x-a \\ x-a & x-a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2ax = 2a(x-a)$

c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = a^2b - a^2c - ab^2 + abc$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -k \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -k \end{vmatrix} = 100$$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} \\ e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} & e^{\pi} + 2e^{-\pi} \end{vmatrix} =$

$$\stackrel{F_3 - F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} \\ 0 & 0 & e^{-\pi} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-\pi} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\pi} & e^{\pi} + e^{-\pi} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-\pi} (e^{\pi} + e^{-\pi} - e^{-\pi}) =$$

$$= e^{-\pi} e^{\pi} = e^0 = 1$$

4. a) $\begin{vmatrix} 3k+1 & k & k \\ 6k+2 & 2k+1 & 2k \\ 3k+1 & k & k+1 \end{vmatrix} = (3k+1) \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 2 & 2k+1 & 2k \\ 1 & k & k+1 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} (3k+1) \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3k+1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

b) Existe $(A(k))^{-1}$ si $k \neq -\frac{1}{3}$.

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

6. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & m \\ m+2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$\stackrel{C_1+C_3}{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & m+2 \\ m+2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & m+2 \\ m+2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1-C_2}{C_3-C_2}{=} 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m+1 \\ m+4 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 4 & m+1 \\ m+4 & 1 \end{vmatrix} = 3m(m+5)$$

Si $m \notin \{0, -5\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 4$

Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

Si $m = -5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

7. a) $|A| = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & -1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ k & 0 & 2 \end{vmatrix} = (k-1)(3k-4)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ Existe } A^{-1} \text{ si } k \notin \left\{1, \frac{4}{3}\right\}$$

b) $k = 2 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} x & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} \stackrel{C_1+C_2+C_3+C_4}{=} (x+10) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix}$

$$= (x+10)(x-8)^2(x+6) = 0$$

Soluciones: $x = -10$, $x = -6$, $x = 8$ (doble)

3 Sistemas de ecuaciones lineales

Propuesta A

1. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -4 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

2. En una tienda de animales hay serpientes, lagartos y cacatúas. Entre todos los animales hay el doble de patas que de cabezas, y el número de alas es cuatro veces el número de lagartos. En un descuido se escapan los lagartos, y cada uno se come una cacatúa; no obstante, aunque todos los lagartos comen, sobreviven tres cacatúas. ¿Cuántos animales hay de cada especie? Plantéalo como un sistema matricial y resuélvelo, si es posible, por el método de la matriz inversa.

3. Comprueba si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos por este método.

a)
$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ x - y - z = 1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

4. Discute en función del parámetro k la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} kx + y + z = 4k \\ x + (k+1)y + kz = k+4 \\ x - y + z = k+1 \end{cases}$$

5. El siguiente sistema de ecuaciones en cierto sentido no es lineal, pero aun así se puede resolver utilizando los métodos habituales, por ejemplo el de Gauss. ¿Para qué valores de t tiene solución?

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 4t \\ \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \beta - \operatorname{tg} \gamma = 0 \\ 2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 0 \end{cases}$$

6. Discute y resuelve, en función de los parámetros a y b , el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = b \\ x + y + z = 0 \\ 4x - 5y + az = 0 \end{cases}$$

7. Un hotel tiene habitaciones triples (3 camas), dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total hay 11 habitaciones y 30 camas.

¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

Propuesta B

1. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ 2x + y + 3z = 10 \\ -3x + y - z = -1 \end{cases}$$

2. El sistema de ecuaciones representado por la siguiente ecuación matricial tiene un número infinito de soluciones. Halla el valor de k .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

3. Comprueba si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos por este método.

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - 2y - z = -1 \\ 3x + 2y - 4z = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 4x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

4. Halla el valor de a para que el siguiente sistema de ecuaciones no tenga una solución única.

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y = -6 \\ x - 2y + az = \frac{7}{2} \end{cases}$$

5. Halla todos los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones diferentes de la trivial, es decir, $(0, 0, 0)$; y calcula en función de k el conjunto de soluciones.

$$\begin{cases} x - y + kz = 0 \\ kx + 2y - 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

6. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

7. En un cine los titulares de carnet joven pagan 5,50 € por la entrada, los mayores de 65 años pagan 6,00 €, y el resto de espectadores, 7,50 €.

En una sesión se venden 500 entradas y se recaudan 3600 €.

Sabiendo que a esa sesión acudieron la mitad de jóvenes que de personas mayores de 65 años, ¿cuántos espectadores de cada tipo había?

Soluciones propuesta A

1.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -4 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3x - 2y + z = -4 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ -5y + 4z = 2 \\ y + 2z = 8 \end{cases} \xrightarrow{F_2 + 5F_3} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 14z = 42 \\ y + 2z = 8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2 - y + z = -1 \\ y = 8 - 2z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

2. Si $x = n.º$ de serpientes, $y = n.º$ de lagartos y $z = n.º$ de cacatúas, el sistema es:

$$\begin{cases} 4y + 2z = 2(x + y + z) \\ 2z = 4y \\ -y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Como } |A| = 1 \neq 0:$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Luego hay 3 serpientes, 3 lagartos y 6 cacatúas (al comienzo del problema; al final, solo quedan 3).

3. a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. No es de Cramer.

b) La matriz es cuadrada y regular: $|A| = 13 \neq 0$

$$x = \frac{A_x}{13} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{13} = 3, \quad y = \frac{A_y}{13} = 1, \quad z = \frac{A_z}{13} = 1$$

4. $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; |A| = 2k^2 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -\frac{3}{2}$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$ S. C. D.

Si $k = 1$, S. C. I., porque:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

Si $k = -\frac{3}{2}$, S. I., porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$ y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

5. Se realiza el cambio de variable $x = \text{sen } \alpha$, $y = \text{cos } \beta$, $z = \text{tg } \gamma$, y el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 4t \\ x - y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$

Para que el sistema tenga solución al deshacer el cambio, debe ser:

$$\begin{cases} -1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 2t \leq 1 \\ -1 \leq 3t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{3}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

Si $a \neq 4 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$ S. C. D. \Rightarrow

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{b(a+5)}{a-4}, -b, \frac{-9b}{a-4} \right)$$

Si $a = 4$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -9b$$

$\begin{cases} \text{Si } b \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$ S. I.

$\begin{cases} \text{Si } b = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2 \Rightarrow$ S. C. I., $(x, y, z) = (-\lambda, 0, \lambda)$

7. Si $x = n.º$ de habitaciones triples, $y = n.º$ de habitaciones dobles y $z = n.º$ de habitaciones sencillas, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 3x + 2y + z = 30 \end{cases}, \text{ que es un sistema compatible}$$

indeterminado.

Sus soluciones son $(x, y, z) = (\lambda + 8, -2\lambda + 3, \lambda)$.

Dado que el hotel tiene habitaciones de los tres tipos, $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$. De la segunda inecuación, $-2\lambda + 3 > 0$, se deduce que $\lambda = 1$.

Luego la solución es $(x, y, z) = (9, 1, 1)$: hay 9 habitaciones triples, 1 doble y 1 sencilla.

Soluciones propuesta B

$$1. \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 2x+y+3z=10 \\ -3x+y-z=-1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+3F_1}} \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 5y+5z=20 \\ -5y-4z=-16 \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2} \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 5y+5z=20 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-5+2y+z=-1 \\ y=4-z=0 \\ z=4 \end{cases}$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Para que sea S. C. I. debe ser $\text{rg}(A^*) = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k - 25 = 0 \Rightarrow k = 5$$

3. a) Es de Cramer: la matriz de coeficientes es cuadrada y regular, $|A| = 19 \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{19} = \frac{38}{19} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

- b) No es de Cramer: la matriz de coeficientes no es regular, $|A| = 0$.

- c) No es de Cramer: la matriz de coeficientes no es cuadrada (es 4×3).

4. Para que sea S. C. I. debe cumplirse que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n.$ de incógnitas = 3, es decir,

$$|A| = 0 \text{ y } \text{rg}(A^*) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = 14a - 14 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2. \text{ Luego } a = 1$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - k + 2 = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$
 \Rightarrow S. C. D. Al ser homogéneo, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Si $k = 1$, coinciden la primera y tercera ecuaciones, luego es S. C. I.:

$$\begin{cases} x-y=-z \\ x+2y=4z \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2\lambda}{3}, \frac{5\lambda}{3}, \lambda \right)$$

Si $k = -2$, la segunda ecuación es -2 veces la primera, luego es S. C. I.:

$$\begin{cases} x-y=2z \\ x-y=-z \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, \lambda, 0)$$

$$6. \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n.$ de incógnitas = 3 \Rightarrow S. C. D.

$$(x, y, z) = \left(\frac{-a}{a+2}, \frac{-a}{a+2}, \frac{a^2+2a+2}{a+2} \right)$$

Si $a = 1$, las tres ecuaciones coinciden:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (1-\lambda-\mu, \lambda, \mu)$$

Si $a = 2$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2,$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{S. I.}$$

7. Si $x = n.$ de jóvenes, $y = n.$ de mayores de 65 años y $z = n.$ de espectadores que no son de los anteriores, el sistema es:

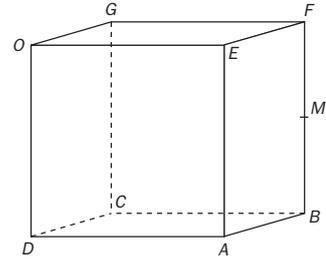
$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 5,5x+6y+7,5z=3600 \\ y=2x \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{Sust. } F_3 \text{ en } F_1 \text{ y } F_2 \\ 2F_2}} \begin{cases} x+y+z=500 \\ 5,5x+6y+7,5z=3600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+z=500 \\ 35x+15z=7200 \end{cases} \xrightarrow{15F_1-F_2} 10x=300 \rightarrow x=30$$

La solución es $(x, y, z) = (30, 60, 410)$, es decir, había 30 jóvenes, 60 mayores de 65 años y 410 espectadores distintos de los anteriores.

4 Vectores en el espacio

Propuesta A



- En el cubo de la figura, M es el punto medio de BF . Expresa los vectores \overline{AF} , \overline{GE} , \overline{FO} y \overline{DM} como combinación lineal de los vectores $\vec{g} = \overline{OG}$, $\vec{d} = \overline{OD}$ y $\vec{e} = \overline{OE}$.
- Calcula el valor de k para que el vector $\vec{a} = (7, -6, 2)$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{b} = (1, 0, 5)$ y $\vec{c} = (2, -2, k)$.
- Dados los vectores $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{v} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, calcula:
 - Los módulos de \vec{u} y de \vec{v} .
 - El producto vectorial de \vec{u} y \vec{v} .
 - El seno del ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
 - La medida del ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
 - La proyección de \vec{v} sobre \vec{u} .
- Determina el valor del parámetro λ para que los vectores $\vec{u} = \lambda\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{k}$ sean:
 - Ortogonales.
 - Paralelos.
- Halla un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (4, 6, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, -2)$.
- Demuestra vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
- Sean $\vec{u} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3$; $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$; $\vec{w} = 5\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 5\vec{u}_3$. Estudia las soluciones de las ecuaciones vectoriales:

a) $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{v}$	c) $\vec{v} \times \vec{x} = \vec{u}$
b) $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{w}$	d) $\vec{v} \times \vec{u} = x\vec{w}$
- Si $\vec{u} = (3, 0, -1)$, $\vec{v} = (-5, 2, 3)$, $\vec{w} = (2, -1, 1)$, comprueba que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.
- Se consideran los vectores de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (4, 2, x)$.
 - Calcula el valor de x que hace que los vectores \vec{u} y \vec{v} sean perpendiculares.
 - Para el valor de x calculado en el apartado anterior, expresa el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}$ como producto de un número real por el vector \vec{v} .
- Determina todos los posibles valores del parámetro k que hacen que el triángulo de vértices $A(3, 4, -1)$, $B(1, 0, 3)$ y $C(k, 5, -2)$ sea rectángulo.

Propuesta B

- Un minero hace un recorrido por una mina bajo una llanura: baja 10 m en ascensor, camina 20 m hacia el norte por una galería, 15 m hacia el oeste, 5 m hacia el sur, sube 5 m en ascensor y camina 10 m hacia el noreste. En ese momento se produce un derrumbe, y el minero queda atrapado. Logra comunicar su posición a sus compañeros en la superficie y, tras analizar la situación, estos deciden cavar un pozo vertical para rescatarlo.
 - ¿En qué posición de la superficie (relativa a la bocamina) deben perforar?
 - ¿A qué profundidad se encuentra el minero atrapado?
 - ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el minero y la bocamina?
- El vector $\vec{a} = (-3, -1, 2)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{b} = (1, 5, -4)$ y $\vec{c} = (k, -2, 3)$. ¿Cuál es el valor de k ?
- Dados los vectores $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, calcula:
 - Los módulos de \vec{u} y de \vec{v} .
 - El producto escalar de \vec{u} y \vec{v} .
 - La medida del ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
 - La proyección de \vec{u} sobre \vec{v} .
 - La proyección de \vec{v} sobre \vec{u} .
- Sean $\vec{u} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$; $\vec{v} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$; $\vec{w} = 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 8\vec{u}_3$. Estudia las soluciones de las ecuaciones vectoriales:
 - $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{v}$
 - $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{w}$
 - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{x} = \vec{w}$
 - $\vec{v} \cdot \vec{x} = 1$
- Se llaman cosenos directores de un vector \vec{u} a los cosenos de los ángulos que determina el vector \vec{u} con cada uno de los vectores de la base. Halla los cosenos directores del vector $\vec{u} = (2, 2, 1)$.
- Demuestra la igualdad vectorial $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$.
- Simplifica la expresión $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{u} - \vec{v} - \vec{w})$, sabiendo que el vector \vec{w} es combinación lineal de los vectores \vec{u} y \vec{v} .
- Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 0)$. Demuestra que los sistemas de vectores siguientes son linealmente independientes:
 - $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}\}$
 - $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}\}$
- Se considera el vector de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$.
 - Halla, con la ayuda de los parámetros necesarios, la expresión de todos los vectores ortogonales a \vec{u} .
 - Escribe el vector $\vec{a} = (-3, 0, 3)$ como suma de dos vectores, uno de ellos paralelo a \vec{u} y el otro ortogonal a \vec{u} .
- Se consideran los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + x\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + x\vec{j}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + x\vec{k}$.
 - Calcula los posibles valores de x que hacen que el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores sea igual a 10.
 - Estudia si existe algún valor de x que haga que los tres vectores sean coplanarios.

Soluciones propuesta A

1. $\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{BF} = \overline{OG} - \overline{OD} = \vec{g} - \vec{d}$

$\overline{GE} = \overline{GO} + \overline{OE} = -\overline{OG} + \overline{OE} = -\vec{g} + \vec{e}$

$\overline{FO} = \overline{FE} + \overline{EO} = -\overline{OG} - \overline{OE} = -\vec{g} - \vec{e}$

$\overline{DM} = \overline{DO} + \overline{OG} + \overline{GF} + \overline{FM} =$
 $= -\vec{d} + \vec{g} + \vec{e} + \frac{1}{2}\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{d} + \vec{g} + \vec{e}$

2. $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} 7 = \alpha + 2\beta \\ -6 = -2\beta \\ 2 = 5\alpha + k\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ k = -1 \end{cases}$

3. a) $|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

$|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2} = 7$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (2, -15, -14)$

c) $\text{sen } \alpha = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{4 + 225 + 196}}{3 \cdot 7} = \frac{\sqrt{425}}{21}$

d) $\alpha = \arcsen\left(\frac{\sqrt{425}}{21}\right) = 79^\circ 1' 9,93''$

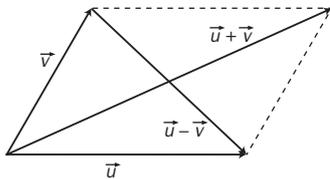
e) $|\vec{v}'| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{|-4|}{3} = \frac{4}{3}$

4. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -\lambda - 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

b) $\frac{\lambda}{-1} = \frac{-2}{\lambda} = \frac{3}{1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 2 \\ 3\lambda = -2 \end{cases}$. Incompatible, $\nexists \lambda$

5. $\vec{x} = \pm \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \pm \frac{(-9, 6, 0)}{\sqrt{81 + 36}} = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}(-3, 2, 0)$

6.



Las diagonales están representadas por los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$. Se halla su producto escalar, teniendo en cuenta que $|\vec{u}| = |\vec{v}|$:

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - |\vec{v}|^2 = 0$, por tanto, son ortogonales.

7. a) $\vec{u} \times \vec{x}$ es ortogonal a \vec{u} , y como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \neq 0$, no puede existir ningún vector \vec{x} que verifique la igualdad.

b) Como $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, puede haber vectores $\vec{x} = (x, y, z)$ que verifiquen la igualdad $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{w}$. Se resuelve la ecuación vectorial:

$\vec{u} \times \vec{x} = (2z + y, -x - z, y - 2x) = (5, -5, -5)$

El sistema que se obtiene es compatible indeterminado con solución:

$(x, y, z) = (5 - \lambda, 5 - 2\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbf{R}$

c) No tiene solución, porque $\vec{v} \times \vec{x}$ es un vector con la dirección de \vec{v} , y \vec{u} no tiene la misma dirección que \vec{v} .

d) $\vec{v} \times \vec{u} = (-3, 3, 3) = -\frac{3}{5}(5, -5, -5) \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$.

8. $(\vec{v} \times \vec{w}) = (5, 11, 1), \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (11, -8, 33)$

$(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} = 5\vec{v} = (-25, 10, 15)$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -18\vec{w} = (-36, 18, -18)$

$(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = (11, -8, 33)$

9. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -4 + 2 + x = 0 \Rightarrow x = 2$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (0, 6, -6)$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (12, 6, 6) = 3\vec{v}$

10. a) Si es rectángulo en A, entonces $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$

$\overline{AB} = (-2, -4, 4); \overline{AC} = (k - 3, 1, -1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -2(k - 3) - 4 - 4 = 0 \Rightarrow k = -1$

b) Si es rectángulo en B, entonces $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$

$\overline{BA} = (2, 4, -4); \overline{BC} = (k - 1, 5, -5) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(k - 1) + 20 + 20 = 0 \Rightarrow k = -19$

c) Si es rectángulo en C, entonces $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$

$\overline{CA} = (3 - k, -1, 1); \overline{CB} = (1 - k, -5, 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow (3 - k)(1 - k) + 5 + 5 = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 13 = 0,$

que no tiene solución real.

Soluciones propuesta B

1. Se denota el norte por \vec{i} , el este por \vec{j} y arriba por \vec{k} . Entonces el vector de posición del minero es:

$$\vec{p} = -10\vec{k} + 20\vec{i} - 15\vec{j} - 5\vec{i} + 5\vec{k} + 5\sqrt{2}\vec{i} + 5\sqrt{2}\vec{j} = \\ = (15 + 5\sqrt{2})\vec{i} + (-15 + 5\sqrt{2})\vec{j} - 5\vec{k}.$$

a) Aprox. 22,07 m al norte y 7,93 m al oeste.

b) A 5 m de profundidad.

c) $|\vec{p}| = +\sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}} = 5\sqrt{23} \approx 23,98 \text{ m.}$

2. $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} -3 = \alpha + k\beta \\ -1 = 5\alpha - 2\beta \\ 2 = -4\alpha + 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{7} \\ \beta = \frac{6}{7} \\ k = -\frac{11}{3} \end{cases}$

3. a) $|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$$|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{11}$$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 1 + 0 = 3$

c) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{11}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{55}}\right) = 66^\circ 8' 20''$$

d) $|\vec{u}'| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{11}}$

e) $|\vec{v}'| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

4. a) No tiene solución, porque $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector con la dirección de \vec{u} , y \vec{v} no tiene la misma dirección que \vec{u} .

b) $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{w}$ no tiene sentido, porque $\vec{u} \cdot \vec{x}$ es un número real y no puede ser igual a un vector.

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} \Rightarrow [(-1, 2, 1) + (2, -1, 3)] \times (2, 2, 8) \Rightarrow \\ \Rightarrow (1, 1, 4) \times (2, 2, 8) \Rightarrow \vec{x} = 2$

d) $\vec{v} \cdot \vec{x} = 1 \Rightarrow (2, -1, 3) \cdot (x, y, z) = 1 \Rightarrow 2x - y + 3z = 1$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones que pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\vec{x} = (\lambda, -1 + 2\lambda + 3\mu, \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

5. Los vectores de la base son:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{|\vec{u}||\vec{i}|} = \frac{2+0+0}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{j}}{|\vec{u}||\vec{j}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{|\vec{u}||\vec{k}|} = \frac{1}{3}$$

6. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \\ = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) =$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$$

7. $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}) =$

$$= \vec{0} - \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u} - \vec{0} - \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} - \vec{w} \times \vec{v} - \vec{0} = \\ = -2(\vec{u} \times \vec{v}) - 2(\vec{u} \times \vec{w}) = -2(\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}))$$

Si $\vec{w} = \lambda\vec{u} + (\mu - 1)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, y resulta:

$$-2(\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})) = -2(\vec{u} \times (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})) = -2\mu(\vec{u} \times \vec{v})$$

8. $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1), \quad \vec{v} \times \vec{w} = (-1, 1, -1)$

a) $\det(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

b) $\det(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

9. a) $\vec{u} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow (-1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow -x + y + z = 0$

El conjunto es: $\{\vec{x} = (\lambda + \mu, \lambda, \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$.

b) $\vec{a} = k\vec{u} + \vec{x} \Rightarrow (-3, 0, 3) = (-k, k, k) + (\lambda + \mu, \lambda, \mu)$

$$\begin{cases} -3 = -k + \lambda + \mu \\ 0 = k + \lambda \\ 3 = k + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \lambda = -2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$\vec{a} = (-2, 2, 2) + (-1, -2, 1)$$

10. a) El volumen del paralelepípedo es:

$$V = \left| \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 6 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 4$$

b) Si fueran coplanarios, $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, que no tiene soluciones reales. Luego no existe ningún valor de x que cumpla esta condición.

5 Planos y rectas en el espacio

Propuesta A

- En cada uno de los siguientes casos calcula las coordenadas del vector libre, sabiendo que uno de sus representantes fijos tiene como origen el punto A y por extremo el punto B .
 - $A(2, 3, -1)$ y $B(4, 5, 2)$
 - $A(-1, 2, 0)$ y $B(4, -3, -2)$
- Calcula las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos $A(2, 3, -2)$ y $B(-4, 3, -2)$.
- Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple:
 - Pasa por el punto $A(-1, 3, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2, 4)$.
 - Pasa por los puntos $A(-1, 2, 4)$ y $B(-3, 4, -7)$.
 - Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$.
- Dado el segmento de extremos $A(1, 2, -3)$ y $B(-4, 12, 2)$, calcula las coordenadas de un punto interior a dicho segmento de manera que la distancia que lo separa de A sea $\frac{2}{5}$ de la longitud del segmento AB .
- Se considera la recta de ecuación implícita $r : \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Determina:
 - Un punto y el vector director.
 - La ecuación en forma paramétrica.
 - La ecuación en forma continua.
- Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:
 - Pasa por el punto $A(4, 0, -1)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (0, -2, 3)$ y $\vec{v} = (5, -1, 2)$.
 - Pasa por los puntos $A(3, -2, 1)$, $B(0, 0, -2)$ y $C(1, 1, 1)$.
 - Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y contiene a la recta $r : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{x+3}{-1}$.
- Decide en cada uno de los siguientes casos si los puntos A , B y C están alineados o forman un triángulo:
 - $A(1, 3, -1)$, $B(-1, 4, -3)$ y $C(3, 2, 1)$
 - $A(1, 2, -2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(0, 4, -4)$
- Calcula la ecuación del plano simétrico de $\pi : x - 11y + 2z + 3 = 0$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.
- Calcula m para que $A(-1, m - 1, 0)$, $B(0, m + 2, 1)$ y $C(1, 5, 2)$ pertenezcan a una recta. ¿Cuál es su ecuación?
- Tres aristas concurrentes en el vértice $A(2, 0, 0)$ de un paralelepípedo son AB , AC y AD . Sabiendo que $B(5, 0, 1)$, $C(3, 1, -3)$ y $D(1, 10, 3)$, determina:
 - Los otros cuatro vértices.
 - El volumen del paralelepípedo.
 - Comprueba que es un ortoedro.
- Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : ax - y + z = 0$$

$$\pi_2 : x + ay = 0$$

$$\pi_3 : 2x + az = 0$$

Propuesta B

- Del vector $\overline{PQ} = (5, 3, -1)$ se sabe que $P(-1, 2, 3)$. Calcula las coordenadas del extremo Q .
 - Del vector $\overline{RS} = (-1, 3, -2)$ se sabe que $S(-2, 8, -1)$. Calcula las coordenadas del origen R .
- El punto $M(-6, 5, 1)$ es el punto medio del segmento AB . Halla el punto A si el punto B es $(10, -7, 0)$.
- Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple:
 - Pasa por el punto $A(6, -1, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (3, 1, 0)$.
 - Pasa por los puntos $A(5, 2, -1)$ y $B(5, 4, -1)$.
 - Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y es paralela a la recta $s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{1}$.
- Dado el segmento de extremos $A(-3, 4, 4)$ y $B(1, 12, 0)$, calcula las coordenadas de tres puntos P , Q y R que dividan al segmento en cuatro partes iguales.
- Se define la recta r como intersección de los planos $\pi: 2x - 3y + z = 3$ y $\sigma: x - z = 6$. Determina de r :
 - Un punto y el vector director.
 - La ecuación en forma paramétrica.
 - La ecuación en forma continua.
- Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:
 - Pasa por el punto $A(1, 2, -2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.
 - Pasa por los puntos $A(-1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 3)$ y $C(-1, 2, 3)$.
 - Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y uno de sus vectores normales es $\vec{n} = (1, -2, -3)$.
- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1, 1, 2)$ y contiene a la recta $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = z$.
- Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(2, 1, 3)$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.
 - Halla la ecuación en forma paramétrica de la recta simétrica de $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -2 - t \end{cases}$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.
- Un cubo tiene un vértice en el punto $A(1, 1, 1)$ y el centro en el punto $C(2, 2, 2)$.
¿Cuál es su volumen?
- Estudia la posición relativa de los planos:
 $\pi_1: 3x - y + 2z = 1$
 $\pi_2: x + 4y + z = b$
 $\pi_3: 2x - 5y + az = -2$

Soluciones propuesta A

1. a) $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4, 5, 2) - (2, 3, -1) = (2, 2, 3)$

b) $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4, -3, -2) - (-1, 2, 0) = (5, -5, -2)$

2. $M\left(\frac{1}{2}(2-4), \frac{1}{2}(3+3), \frac{1}{2}(-2-2)\right) = M(-1, 3, -2)$

3. a)
$$\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{4}$$

b) Un vector director es $\vec{u} = \overline{AB} = (-2, 2, -11)$.

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 - 11t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-11}$$

c) Un vector director es $\vec{u} \times \vec{v} = (4, 5, 2)$.

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 + 5t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{2}$$

4. $\vec{p} = \vec{a} + \frac{2}{5}\overline{AB} = \vec{a} + \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{3}{5}(1, 2, -3) + \frac{2}{5}(-4, 12, 2) \Rightarrow P(-1, 6, -1)$$

5. a) $A(0, 1, 3), \vec{u} = (1, 2, -1) \times (1, 1, 1) = (3, -2, -1)$

b)
$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

c) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

6. a)
$$\begin{cases} x = 4 + 5\mu \\ y = -2\lambda - \mu \\ z = -1 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 5 & x-4 \\ -2 & -1 & y \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 15y + 10z + 14 = 0$$

b) $\pi: (B; \overline{BA}, \overline{BC})$, donde $\overline{BA} = (3, -2, 3)$ y

$$\overline{BC} = (1, 1, 3)$$

$$\begin{cases} x = 3\lambda + \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = -2 + 3\lambda + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ -2 & 1 & y \\ 3 & 3 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x - 6y + 5z + 10 = 0$$

c) $\vec{u} = (2, 0, -1), B(0, 1, -3) \in r, \overline{AB} = (3, -3, -3)$

$$\pi(A; \vec{u}, \overline{AB}): \begin{cases} x = -3 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 4 - 3\mu \\ z = -\lambda - 3\mu \end{cases}$$

$$\pi: x - y + 2z + 7 = 0$$

7. a) $\overline{AB} = (-2, 1, -2), \overline{AC} = (2, -1, 2)$

Como tienen igual dirección, los tres puntos están alineados.

b) $\overline{AB} = (1, -2, 3), \overline{AC} = (-1, 2, -2)$

Como tienen distinta dirección, los tres puntos no están alineados y forman un triángulo.

8. El plano simétrico será paralelo al plano dado y pasará por un punto simétrico de un punto cualquiera del plano dado, por ejemplo: $A(1, 0, -2) \in \pi$

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+0}{2}, \frac{z-2}{2}\right) = (-2, 1, 0) \Rightarrow A'(-5, 2, 2)$$

$$\pi: x - 11y + 2z + D = 0 \Rightarrow -5 - 22 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = 23 \Rightarrow \pi': x - 11y + 2z + 23 = 0$$

9. $\overline{AB} = (1, 3, 1), \overline{AC} = (2, 6 - m, 2)$. Para que los tres puntos estén alineados:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6-m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 0$$

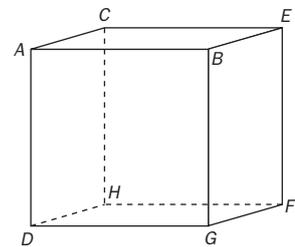
10. a) $\overline{AB} \sim \overline{CE} \Rightarrow (3, 0, 1) = (x-3, y-1, z+3) \Rightarrow E(6, 1, -2)$

Análogamente se obtienen:

$$G(4, 10, 4)$$

$$F(5, 11, 1)$$

$$H(2, 11, 0)$$



b) $V = \left| \begin{vmatrix} \overline{AB} & \overline{AC} & \overline{AD} \end{vmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 110 \text{ u}^3$

c) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0, \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 0, \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$

11.
$$\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1)$$

Si $a = 0$, $\pi_2 \equiv \pi_3$ y π_1 los corta.

Si $a = \pm 1$, tienen una recta en común y no son paralelos ni coincidentes entre sí.

Si $a \neq 0, a \neq \pm 1$, tienen un punto en común que es el origen de coordenadas.

Soluciones propuesta B

1. a) $\vec{q} = \vec{p} + \overline{PQ} = (-1, 2, 3) + (5, 3, -1) = (4, 5, 2) \Rightarrow Q(4, 5, 2)$

b) $\vec{r} = \vec{s} - \overline{RS} = (-2, 8, -1) - (-1, 3, -2) = (-1, 5, 1) \Rightarrow R(-1, 5, 1)$

2.
$$\begin{cases} x_M = -6 = \frac{x_A + 10}{2} \\ y_M = 5 = \frac{y_A - 7}{2} \\ z_M = 1 = \frac{z_A + 0}{2} \end{cases} \Rightarrow A(-22, 17, 2)$$

3. a)
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 + t \Rightarrow \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{0} \\ z = -2 \end{cases}$$

b) Un vector director es $\vec{u} = \overline{AB} = (0, 2, 0)$.

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 + 2t \Rightarrow \frac{x-5}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0} \\ z = -1 \end{cases}$$

c) Un vector director es $\vec{u} = (2, -3, 1)$.

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 4 - 3t \Rightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{1} \\ z = t \end{cases}$$

4. $\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{4}\overline{AB} = \vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \Rightarrow$

$$\vec{p} = \frac{3}{4}(-3, 4, 4) + \frac{1}{4}(1, 12, 0) = (-2, 6, 3)$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = (-1, 8, 2)$$

$$\vec{r} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = (0, 10, 1)$$

Por tanto: $P(-2, 6, 3)$, $Q(-1, 8, 2)$, $R(0, 10, 1)$

5. a) $A(0, -3, -6)$, $\vec{u} = (2, -3, 1) \times (1, 0, -1) \sim (3, 3, 3)$

b)
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = -6 + \lambda \end{cases}$$

c) $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+6}{1}$

6. a)
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 2 - 2\lambda + \mu \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ -2 & 1 & y-2 \\ 0 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ z = -2 + 2\mu \end{cases} \\ \Rightarrow 4x - 2y + 3z + 6 = 0$$

b) $\pi: (A; \vec{u}, \vec{v})$, donde $\vec{u} = \overline{AB} = (0, -2, 4)$ y $\vec{v} = \overline{AC} = (0, 0, 4)$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -1 + 4\lambda + 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & x+1 \\ -2 & 0 & y-2 \\ 4 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+1=0$$

c) El plano pedido es de la forma: $x - 2y - 3z + D = 0$, y como debe pasar por A , $-11 + D = 0 \Rightarrow D = 11 \Rightarrow x - 2y - 3z + 11 = 0$

7. La recta r pasa por $A(1, 2, 0)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (2, 1, -1)$. El plano pedido es el determinado por $\pi: (A; \vec{u}, \overline{AP})$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & x-1 \\ 1 & -1 & y-2 \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

8. a) $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = (-2, 1, 0) \Rightarrow A'(-6, 1, -3)$

b) La recta será paralela a r y pasará por el punto simétrico de $B(1, 0, -2)$.

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z-2}{2}\right) = (-2, 1, 0) \Rightarrow B'(-5, 2, 2)$$

$$r': \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

9. Se traslada el cubo según el vector $(-1, -1, -1)$, de modo que su vértice es ahora $A'(0, 0, 0)$ y su centro es $C'(1, 1, 1)$, mientras que su volumen no ha variado.

Hay infinitos cubos con vértice A' y centro C' , pero todos tienen el mismo volumen. Se toma, por tanto, el cubo con las caras paralelas a los planos coordenados. Tres aristas del cubo quedan sobre los ejes coordenados.

La proyección del centro $C'(1, 1, 1)$ sobre cada uno de los ejes da los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, que son los puntos medios de las aristas del cubo. Por tanto, los puntos $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$ son vértices del cubo, luego la arista del cubo mide 2 unidades.

El volumen del cubo es $V = 2^3 = 8 \text{ u}^3$.

10.
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 13(a-1) \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13(b-3)$$

Si $a \neq 1$, los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = 1$ y $b \neq 3$, los planos se cortan dos a dos determinando tres rectas paralelas.

Si $a = 1$ y $b = 3$, tienen una recta en común.

6 Propiedades métricas

Propuesta A

- Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{-1}$ y $s: \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$, determina:
 - Un punto y el vector director de cada una.
 - El ángulo que forman.
 - El punto de corte de cada una de las rectas con el plano XY .
 - La distancia entre las dos rectas.
- Sean el plano $\pi: x-y+z+4=0$ y la recta $r: (2-t, 3t, -1+2t)$. Determina:
 - Su posición relativa.
 - El ángulo que forma la recta con el plano.
 - La ecuación de la recta r' que se obtiene al proyectar ortogonalmente la recta sobre el plano.
 - El ángulo que forma la recta r con su proyección r' .
 - La ecuación de otra recta s que corta perpendicularmente a r y está contenida en el plano π .
- Los puntos $A(0, 0, 3)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-5, 2, 1)$ y $D(0, 7, -2)$ son los vértices de un tetraedro, calcula:
 - La longitud de las aristas AB y CD .
 - El área de la cara BCD .
 - La altura del tetraedro sobre la cara BCD .
 - La medida del diedro que determinan las caras ABC y ABD .
 - El volumen del tetraedro.
- Se considera la recta $r: \begin{cases} x-2y=1 \\ 3y+z=-2 \end{cases}$ y el punto $P(4, 4, 6)$. Halla:
 - El punto de la recta más cercano a P .
 - La distancia del punto P a la recta r .
 - La ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P .
- Los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(-1, 0, 5)$ son vértices de un triángulo de área $S = \sqrt{235}$. El tercer vértice C pertenece a la recta de ecuación $r: \frac{x-1}{0} = y+3 = \frac{z+2}{-1}$. Determina:
 - Las coordenadas del vértice C .
 - Las coordenadas de otro punto $P \in r$ de manera que el triángulo APB sea rectángulo en A .
 - El área del triángulo APB .
- Dados el punto $P(-3, 1, 0)$ y la recta $r: (1+3t, -1+t, -2)$, determina:
 - La ecuación del plano que los contiene.
 - La distancia del punto a la recta.
 - Las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r .

Propuesta B

1. El plano $\pi: 2x + 2y + z - 4 = 0$ forma con los planos de coordenadas XY , XZ , YZ un tetraedro de vértices O , A , B , C . Determina:
- Las coordenadas de A , B y C .
 - El área de la cara ABC del tetraedro.
 - El ángulo que forman las caras ABC y OAB .
 - La distancia del vértice O al plano π .
 - La ecuación paramétrica de la recta donde π corta al plano XZ .

2. Se considera el plano $\pi: x - y - z + 1 = 0$, la recta $r: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$ y el punto $P(4, -6, 5)$.

Determina las distancias del punto al plano y a la recta.

3. Se consideran las rectas de ecuaciones $r: \begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s: \frac{x+2}{0} = y - 5 = z + 1$.

- Confirma que son rectas paralelas.
- Halla la ecuación del plano que las contiene.
- Halla la distancia entre las dos rectas.

4. El volumen del tetraedro de vértices $A(-2, 5, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(0, 4, 0)$ y $D(k, -3, 2)$ es 10 u^3 .

- Determina el valor de k .
- Para el valor de k hallado, ¿cuánto mide la altura del tetraedro desde D ?
- Comprueba, utilizando la altura hallada, que el volumen de un tetraedro es $V = \frac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h$.

5. Dados los puntos $P(-5, 1, -1)$, $Q(-9, 7, -4)$ y el plano $\pi: 3x - y + z - 5 = 0$, determina las coordenadas de un punto T del plano π para que la suma de las distancias $PT + TQ$ sea la menor posible.

Calcula cuánto es la suma de las dos distancias.

Toma otro punto cualquiera X del plano y comprueba que la suma de distancias $PX + XQ$ es mayor que la hallada anteriormente.

6. Determina la ecuación de tres planos que contienen a la recta $r: \begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ x - z = -2 \end{cases}$ y que dividen al segmento MN , de extremos $M(-1, 5, 2)$, $N(7, 1, -10)$, en cuatro partes iguales.

¿Qué ángulos forman los tres planos entre sí?

Soluciones propuesta A

1. a) $r(A, \vec{u}) : \begin{cases} A(0, 1, -3) \\ \vec{u} = (2, 0, -1) \end{cases}, s(B, \vec{v}) : \begin{cases} B(9, -5, 0) \\ \vec{v} = (-3, 2, 1) \end{cases}$

b) $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{7}{\sqrt{70}} \Rightarrow \alpha = 33^\circ 12' 39''$

c) El plano XY tiene ecuación $z = 0$, por lo que $r \cap XY = P(-6, 1, 0)$, $s \cap XY = B(9, -5, 0)$.

d) $d(r, s) = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{AB}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}, \begin{cases} \vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 4) \\ \vec{AB} = (9, -6, 3) \end{cases}$

$d(r, s) = \frac{|18 - 6 + 12|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \frac{24}{\sqrt{21}} u$

2. El plano está determinado por un punto, A , y su vector normal. $\pi(A, \vec{w}) : \begin{cases} A(0, 4, 0) \\ \vec{w} = (1, -1, 1) \end{cases}$

La recta es $r(B, \vec{v}) : \begin{cases} B(2, 0, -1) \\ \vec{v} = (-1, 3, 2) \end{cases}$

a) Como $\vec{v} \cdot \vec{w} = -1 - 3 + 2 \neq 0$, la recta y el plano no son paralelos; luego se cortan.

b) $\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{14} \sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 17^\circ 58' 31''$

c) Se halla el plano $\sigma : \begin{cases} r \subset \sigma \\ \pi \perp \sigma \end{cases} \Rightarrow \sigma(B, \vec{v}, \vec{w})$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 3 & -1 & y \\ 2 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma : 5x + 3y - 2z = 12$

$r' = \pi \cap \sigma = \begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ 5x + 3y - 2z - 12 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 7\lambda \\ z = -8\lambda \end{cases}$

d) $\alpha = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \arccos \frac{38}{\sqrt{1596}} = 17^\circ 58' 31''$

e) Si $P = r \cap \pi = P\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}, 4\right)$, entonces la recta es $s(P, \vec{v} \times \vec{w})$. Como $\vec{v} \times \vec{w} = (5, 3, -2)$,

$s : \left(x = -\frac{1}{2} + 5t, y = \frac{15}{2} + 3t, z = 4 - 2t \right)$

3. a) $|\vec{AB}| = \sqrt{22}, |\vec{CD}| = \sqrt{59}$

b) $S = \frac{1}{2} |\vec{CB} \times \vec{CD}| = \frac{1}{2} \sqrt{20^2 + 16^2 + 60^2} = 2\sqrt{266}$

c) Se halla:

$\pi_{BCD}(B, \vec{CB}, \vec{CD}) : 5x + 4y + 15z + 2 = 0$

$h = d(A, \pi_{BCD}) = \frac{|45 + 2|}{\sqrt{25 + 16 + 225}} = \frac{47}{\sqrt{266}} u$

d) Se hallan $\vec{AB} = (2, -3, -3), \vec{AC} = (-5, 2, -2), \vec{AD} = (0, 7, -5), \vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AC} = (12, 19, -11), \vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{AD} = (36, 10, 14)$

$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{468}{\sqrt{996592}} \Rightarrow \alpha = 62^\circ 2' 37''$

e) $V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h = \frac{94}{3} u^3$

4. a) $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'(1 + 2t, t, -2 - 3t) \\ \vec{u} = (2, 1, -3) \end{cases}$

$\vec{PP}' = (-3 + 2t, t - 4, -8 - 3t)$, y como $\vec{PP}' \perp \vec{u}$,

$\vec{PP}' \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 14t + 14 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow P'(-1, -1, 1)$

b) $d(P, r) = |\vec{PP}'| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3} u$

c) $s : \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 4 + 5t \\ z = 6 + 5t \end{cases}$, o también $s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

5. a) $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \Rightarrow C(1, -3 + t, -2 - t)$

$\vec{AB} = (-1, -3, 6), \vec{AC} = (1, -6 + t, -1 - t)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (39 - 3t, 5 - t, 9 - t)$

$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{235} \Rightarrow 11t^2 - 262t + 687 = 0$

Una solución es $t = 3$, de donde $C(1, 0, -5)$.

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AP} = 0 \Rightarrow t = \frac{11}{9} \Rightarrow P\left(1, -\frac{16}{9}, -\frac{20}{9}\right)$

c) $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AP}| = \frac{\sqrt{91430}}{18} \approx 16,8 u^2$

6. a) $r(A, \vec{u}) : \begin{cases} A(1, -1, -2) \\ \vec{u} = (3, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi(P, \vec{u}, \vec{AP})$

$\begin{vmatrix} 3 & -4 & x+3 \\ 1 & 2 & y-1 \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 5z + 6 = 0$

b) $\vec{u} \times \vec{AP} = (2, -6, 10), d(P, r) = \frac{|\vec{u} \times \vec{AP}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{14} u$

c) Se halla la proyección de P sobre la recta.

$M(1 + 3t, -1 + t, -2), \vec{PM} = (4 + 3t, -2 + t, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{PM} = 0 \Rightarrow 10t = -10 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(-2, -2, -2)$

Luego $\vec{OP}' = \vec{OP} + 2\vec{PM} \Rightarrow P'(-1, -5, -4)$

Soluciones propuesta B

1. a) El plano π interseca a los ejes en los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 4)$.

b) Como $\overline{AB} = (-2, 2, 0)$, $\overline{AC} = (-2, 0, 4)$ y $\overline{AB} \times \overline{AC} = (8, 8, 4)$, el área del triángulo ABC es:

$$S = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = 6 \text{ u}^2$$

c) Los vectores normales a las caras ABC y AOB son $\vec{w} = (2, 2, 1)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{w} \cdot \vec{k}|}{|\vec{w}| |\vec{k}|} = \arccos \frac{1}{3} \approx 70^\circ 31' 44''$$

d) $d(O, \pi) = \frac{|0+0+0-4|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{4}{3} \text{ u}$

e) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$

2. $d(P, \pi) = \frac{|4+6-5+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ u}$

$d(P, r) = \frac{|\vec{u} \times \overline{AP}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(-9, 39, 33)|}{|(5, 2, -1)|} = \sqrt{\frac{897}{10}} \text{ u}$

3. a) $r(A, \vec{u}) : \begin{cases} A(1, 0, 3) \\ \vec{u} = (0, 1, 1) \end{cases}$ y $s(B, \vec{v}) : \begin{cases} B(-2, 5, -1) \\ \vec{v} = (0, 1, 1) \end{cases}$

Tienen la misma dirección: son paralelas.

b) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 5 & y \\ 1 & -4 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - z = 0$

c) $d(r, s) = d(A, s) = \frac{|\vec{v} \times \overline{AB}|}{|\vec{v}|} = 3 \frac{\sqrt{22}}{2}$

4. a) $V = \frac{1}{6} |[\overline{CA}, \overline{CB}, \overline{CD}]| = 10 \text{ u}^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ k & -7 & 2 \end{vmatrix} = 60 \Rightarrow 2k + 17 = 60 \Rightarrow k = \frac{43}{2}$$

b) $\pi(A, \overline{AB}, \overline{AC}) : 2x - y + 5z + 4 = 0$

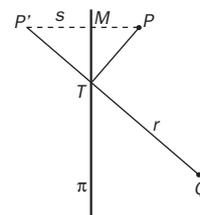
$h = d(D, \pi) = \frac{|43+3+10+4|}{\sqrt{4+1+25}} = \frac{60}{\sqrt{30}} = 2\sqrt{30} \text{ u}$

c) $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4+1+25} = \frac{1}{2} \sqrt{30} \text{ u}^2$

$$V = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sqrt{30} 2\sqrt{30} = 10 \text{ u}^3$$

5. Los puntos dados están al mismo lado del plano π , por ello no es útil trazar la recta que pasa por P y Q . En este caso se traza la recta que pasa por Q y por el simétrico de P respecto del plano.

$$s(P, \vec{w}) : \begin{cases} x = -5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$



$$M = s \cap \pi \Rightarrow 11\lambda - 22 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow M(1, -1, 1)$$

Como M es el punto medio de PP' , se obtiene $P'(7, -3, 3)$.

$$r(Q, \overline{QP'}) : \begin{cases} x = -9 + 16\lambda \\ y = 7 - 10\lambda \\ z = -4 + 7\lambda \end{cases}, T = r \cap \pi$$

Resolviendo el sistema, $T\left(\frac{103}{65}, \frac{25}{65}, \frac{41}{65}\right)$

$$PT + TQ = |\overline{PT}| + |\overline{TQ}| = \frac{\sqrt{5}}{65} (198 + 387) = 9\sqrt{5}$$

Si se toma otro $X \in \pi$, por ejemplo $X(0, -2, 3)$, se obtiene:

$$PX + XQ = \sqrt{50} + \sqrt{211} \approx 21,6 > 20,12 \approx 9\sqrt{5}$$

6. Los planos pertenecen al haz de planos de arista la recta r , cuya ecuación es: $(1+\lambda)x - 2y + (1-\lambda)z + (2\lambda - 5) = 0$

Los puntos que dividen el segmento MN en cuatro partes iguales son: $P_1(1, 4, -1)$, $P_2(3, 3, -4)$ y $P_3(5, 2, -7)$. Los planos del haz que pasan por esos puntos se obtienen con:

$$\lambda_1 = \frac{13}{4}, \lambda_2 = \frac{4}{3}, \lambda_3 = \frac{11}{14}$$

y son: $\begin{cases} 17x - 8y - 9z + 6 = 0 \\ 7x - 6y - z - 7 = 0 \\ 25x - 28y + 3z - 48 = 0 \end{cases}$

Los ángulos que forman son:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2|}{|\vec{w}_1| |\vec{w}_2|} = \frac{176}{\sqrt{434} \sqrt{86}} \Rightarrow \alpha = 24^\circ 21' 22''$$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_3|}{|\vec{w}_2| |\vec{w}_3|} = \frac{340}{\sqrt{86} \sqrt{1418}} \Rightarrow \beta = 13^\circ 11' 19''$$

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3|}{|\vec{w}_1| |\vec{w}_3|} = \frac{622}{\sqrt{434} \sqrt{1418}} \Rightarrow \gamma = 37^\circ 32' 40''$$

7 Lugares geométricos en el espacio

Propuesta A

1. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico.

I) $\begin{cases} x = 3 + 4 \operatorname{sen} t \\ y = 2 + 4 \operatorname{cos} t \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = 3 + 4 \operatorname{cos} t \\ y = 2 + 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$

- a) Elimina el parámetro en cada una y determina sus ecuaciones cartesianas.
 b) Determina los lugares geométricos de los que se trata y represéntalos gráficamente.
 c) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

2. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(1, 5)$ y radio $r = 5$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ y represéntalos.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la elipse de focos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$ y eje mayor $2a = 10$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ y represéntalos.

4. La superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z - 11 = 0$ es tangente a un plano de ecuación $2x + y - 2z + m = 0$. Halla:

- a) El centro, radio y el área de la superficie esférica.
 b) El valor o valores de m .
 c) Las coordenadas del punto o de los puntos de tangencia.

5. Completa la siguiente tabla calculando las coordenadas de los puntos dados en los tres sistemas de coordenadas:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(0, 1, 1)$		
	$Q(2, 30^\circ, -2)$	
		$T(5, 60^\circ, 90^\circ)$

6. Escribe en coordenadas cartesianas y en polares las ecuaciones de las siguientes curvas.

- a) Circunferencia de centro $C(2, 1)$ y radio $r = 2$.
 b) Elipse de centro el origen y semiejes $a = 5$ y $b = 3$.
 c) Hipérbola de centro $C(0, 0)$, eje real $a = 2$ y excentricidad $e = 2$.
 d) Parábola de vértice el origen y foco $F(0, 3)$.

7. Escribe las ecuaciones paramétricas de la superficie cónica formada por todas las rectas que pasan por el vértice $V(-1, 0, 2)$ y se apoyan en la directriz $C: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 2 \operatorname{cos} t \end{cases}$.

8. La curva $B: \begin{cases} x = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \\ y = 0 \\ z = 2a \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \end{cases}$, con $a \neq 0$, se llama "Bruja de Agnesi" y está contenida en el plano XZ . Halla las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución engendrada por la Bruja cuando gira en torno al eje Z .

Propuesta B

1. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico.

$$I) \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \quad II) \begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = -1 + 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

- a) Elimina el parámetro en cada una y determina sus ecuaciones cartesianas.
 b) Determina los lugares geométricos de los que se trata y represéntalos gráficamente.
 c) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

2. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(-4, 0)$ y radio $r = 4$.
 Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = -\frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{4\pi}{3}$ y represéntalos.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la hipérbola de focos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y eje mayor $2a = 6$.

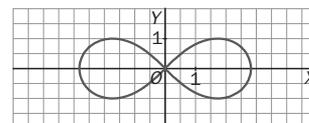
Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = -\frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{3}$, y represéntalos.

4. Se define la lemniscata de Bernoulli como el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos, los focos, tienen un producto constante e igual a c^2 , siendo c la semidistancia focal.

a) Halla su ecuación en coordenadas cartesianas suponiendo que los focos son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

b) Halla su ecuación en coordenadas polares.

c) Si la semidistancia focal es $c = 2$, demuestra que los vértices horizontales son los puntos $A'(-2\sqrt{2}, 0)$ y $A(2\sqrt{2}, 0)$.



5. Completa la siguiente tabla calculando las coordenadas de los puntos dados en los tres sistemas de coordenadas:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(3, \sqrt{3}, 3)$		
	$Q(4, 180^\circ, 4)$	
		$T(3\sqrt{2}, 270^\circ, 135^\circ)$

6. Halla la ecuación implícita de la superficie cilíndrica de directriz la curva $C: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 2 \end{cases}$ y de generatrices paralelas al vector $\vec{v} = (-1, 0, -1)$.

7. Escribe la ecuación de la superficie formada por todos los puntos pertenecientes a las rectas que se apoyan en el eje Z y en la recta de ecuación $r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 12 + 3t \\ z = t \end{cases}$ y cuya dirección es perpendicular al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

8. La superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + d = 0$ tiene un área de 36π unidades cuadradas. Halla:

- a) El radio de la misma y el valor del término independiente d .
 b) La ecuación de otra superficie esférica concéntrica con esta y tangente al plano $\pi: x - 2y + 2z = 0$.
 c) Los puntos de corte de la superficie esférica con los ejes de coordenadas.

Soluciones propuesta A

1. a) $\begin{cases} x = 3 + 4 \operatorname{sen} t \\ y = 2 + 4 \operatorname{cos} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} t = \frac{x-3}{4} \\ \operatorname{cos} t = \frac{y-2}{4} \end{cases}$

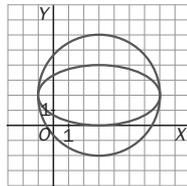
Como $\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t = 1$,

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$\begin{cases} x = 3 + 4 \operatorname{cos} t \\ y = 2 + 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{cos} t = \frac{x-3}{4} \\ \operatorname{sen} t = \frac{y-2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

b) Se trata de una circunferencia de centro $C(3, 2)$ y radio 4, y de una elipse con el mismo centro y semiejes $a = 4$ y $b = 2$.



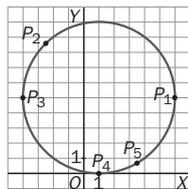
c) Los puntos comunes se obtienen al igualar las ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t = \operatorname{cos} \lambda \\ 2 \operatorname{cos} t = \operatorname{sen} \lambda \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t + 4 \operatorname{cos}^2 t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \operatorname{cos}^2 t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{2} \\ t_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(7, 2) \\ B(-1, 2) \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x = 1 + 5 \operatorname{cos} t \\ y = 5 + 5 \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

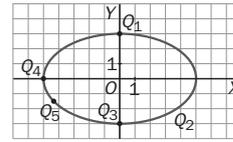
t	P_i
0	(6, 5)
$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{2-5\sqrt{2}}{2}, \frac{10+5\sqrt{2}}{2}\right)$
π	(-4, 5)
$\frac{3\pi}{2}$	(1, 0)
$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{7}{2}, \frac{10-5\sqrt{3}}{2}\right)$



3. $\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} t \\ y = 3 \operatorname{cos} t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

t	Q_i
0	(0, 3)
$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$
π	(0, -3)

$\frac{3\pi}{2}$	(-5, 0)
$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}\right)$



4. a) Centro: $C(3, 2, -1)$.
Radio: $r = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2 - (-11)} = \sqrt{25} = 5$

b) $d(C, \pi) = r \Rightarrow \frac{|6+2+2+m|}{3} = 5 \Rightarrow |10+m| = 15 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m_1 = 5, m_2 = -25$.

c) Los puntos de tangencia son intersección entre la recta perpendicular al plano que pasa por C y el plano. Sus ecuaciones son:
 $\{x = 3 + 2\lambda, y = 2 + \lambda, z = -1 - 2\lambda\}$
Sustituyendo en la ecuación del plano π y dando a m los valores obtenidos en b:

$$m_1 = 5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$m_2 = -25 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3} \Rightarrow A\left(\frac{19}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{13}{3}\right)$$

5. Aplicando las relaciones entre los tres tipos de coordenadas se llega a:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(0, 1, 1)$	$P\left(1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$	$P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$
$Q(\sqrt{3}, 1, -2)$	$Q(2, 30^\circ, -2)$	$Q\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$
$T\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 0\right)$	$T(5, 60^\circ, 0)$	$T(5, 60^\circ, 90^\circ)$

6. a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad r = 2$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad r = \frac{15}{\sqrt{9+16\operatorname{sen}^2 \theta}}$

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad r = \sqrt{\frac{12}{3-4\operatorname{sen}^2 \theta}}$

d) $x^2 = 12y \quad r = \frac{12 \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$

7. La ecuación vectorial de la superficie es $\vec{x} - \vec{a} = s(\vec{c} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + s(\vec{c} - \vec{a})$ y las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + s(2t + 1) \\ y = 0 + s(2 \operatorname{sen} t) \\ z = 2 + s(2 \operatorname{cos} t - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + s + 2st \\ y = 2s \cdot \operatorname{sen} t \\ z = 2 - 2s + 2s \cdot \operatorname{cos} t \end{cases}$$

8. Las ecuaciones de la superficie pedida son:

$$\begin{cases} x = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cos} s - 0 \cdot \operatorname{sen} s \\ y = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{sen} s + 0 \cdot \operatorname{cos} s \\ z = 2a \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cos} s \\ y = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{sen} s \\ z = 2a \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \end{cases}$$

donde s es el ángulo de giro.

Soluciones propuesta B

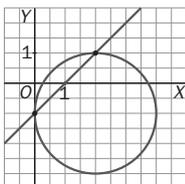
1. a) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow x - 3 = y - 2 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = -1 + 2 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{x-2}{2} \\ \sin t = \frac{y+1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

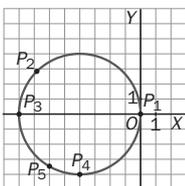
b) Se trata de una recta y de una circunferencia.

c) Para hallar los puntos de corte se resuelve el sistema: $P_1(2, 1)$ y $P_2(0, -1)$



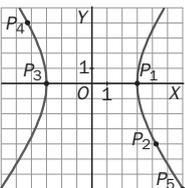
2. $\begin{cases} x = -4 + 4 \cos t \\ y = 0 + 4 \sin t \end{cases} \Rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 16$

t	P_i
0	(0, 0)
$-\frac{3\pi}{4}$	$(-4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
π	(-8, 0)
$\frac{3\pi}{2}$	(-4, -4)
$\frac{4\pi}{3}$	$(-6, -2\sqrt{3})$



3. $\begin{cases} x = 3 \sec t \\ y = 4 \tan t \end{cases} \Rightarrow \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

t	Q_i
0	(3, 0)
$\frac{3\pi}{4}$	$(3\sqrt{2}, -4)$
π	(-3, 0)
$-\frac{3\pi}{4}$	$(-3\sqrt{2}, 4)$
$\frac{5\pi}{3}$	$(6, -4\sqrt{3})$



4. a) Tomando un punto genérico $P(x, y)$ de la curva, se tiene que $d(P, F) = d(P, F') \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$

b) $r^2 = 2c^2 \cos^2 \theta$

c) Haciendo $y = 0$ se obtienen tres soluciones:
 $x = 0, x = \pm c\sqrt{2} \Rightarrow$ Vértices: $(\mp c\sqrt{2}, 0)$.

5. Aplicando las relaciones entre los tres tipos de coordenadas se llega a: $(3\sqrt{2}, 270^\circ, 135^\circ)$

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(3, \sqrt{3}, 3)$	$P(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 3)$	$P(\sqrt{21}; \frac{\pi}{6}; 0,857)$
$Q(-4, 0, 4)$	$Q(4, 180^\circ, 4)$	$Q(4\sqrt{2}, \pi, \frac{\pi}{4})$
$T(0, -3, -3)$	$T(3, 270^\circ, -3)$	$T(3\sqrt{2}, 270^\circ, 135^\circ)$

6. Ecuaciones paramétricas de la superficie:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - s \\ y = 2 \sin t \\ z = 2 - s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{x+s}{2} \\ \sin t = \frac{y}{2} \\ s = 2 - z \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x+2-z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

7. Se toma un punto genérico A del eje Z y otro B de la recta r .

$A(0, 0, s), B(4 + t, 12 + 3t, t)$

Para que el vector \overline{AB} sea perpendicular al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$:

$$\overline{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow t - s = 0 \Rightarrow t = s$$

La superficie está formada por las rectas que pasan por $A(0, 0, t)$ y $B(4 + t, 12 + 3t, t)$:

$$s: \begin{cases} x = s(4 + t) \\ y = s(12 + 3t) \\ z = t \end{cases} \text{ Eliminando los parámetros:}$$

$$s = \frac{x}{4+t} = \frac{y}{12+3t}; \quad t = z \Rightarrow \frac{x}{4+z} = \frac{y}{12+3z} \Rightarrow 12x - 4y + 3xz - yz = 0$$

8. a) $S = 4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r = 3$

Centro: $C(1, 0, -3)$ y $d = 1^2 + (-3)^2 - 3^2 = 1$

b) $r_2 = d(C, \pi) = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{3}$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{25}{9}$$

c) Eje $X: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad x^2 - 2x + 9 = 0$

Sin solución real.

Eje $Y: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0, 1, 0) \\ B(0, 9, 0) \end{cases}$

Eje $Z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \quad z^2 + 6z + 9 = 0 \Rightarrow z = -3 \Rightarrow C(0, 0, -3)$

8 Límites de sucesiones y de funciones

Propuesta A

- Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:
 - 4, 7, 10, 13, 16, ...
 - $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \dots$
 - 1, 4, 9, 16, 25, ...
 - 2, 5, 10, 17, 26, ...
- Dada la sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 2, a_{n+1} = \sqrt{a_n}$:
 - Calcula sus cinco primeros términos.
 - Halla su término general.
 - Sabiendo que es convergente, calcula su límite.
 - ¿Está acotada? Si es así, da una cota inferior y una superior.
- Dada la sucesión de término general $a_n = 3 + \frac{2}{n}$:
 - Calcula sus tres primeros términos y halla el lugar que ocupa el término $a_s = \frac{28}{9}$.
 - Demuestra que es estrictamente decreciente.
 - Calcula su límite y averigua a partir de qué término los siguientes términos se aproximan a 3 con un error menor que $\varepsilon = 0,001$.
- Calcula los siguientes límites:
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n+1} - \frac{n^2 + 2n}{n-1} \right)$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 - 4n + 1}{1 + 3n}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n} \right)$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1} \right)^{n+2}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2}$
- Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?
 - $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$
 - $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-x}$
- Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:
 - $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 31)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (x-5)(4-x^2)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 100x - 2009)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x)(4+x)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 7)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x^2 + 10)$
- Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4}$
- Se considera la función: $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$, calcula $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calcula los siguientes límites de funciones racionales:
 - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^3 + 4x}{x^4 - 16}$

Propuesta B

1. Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) 10, 7, 4, 1, -2, ... b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$ c) 1, 8, 27, 64, 125, ... d) 0, 7, 26, 63, 124, ...

2. Se considera la sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n$.

a) Calcula sus cinco primeros términos.

b) Halla su término general.

c) Si $b_n = |a_n|$ y $c_n = -|a_n|$, demuestra que b_n y c_n son progresiones geométricas. ¿Lo es también a_n ?

d) Estudia la monotonía de a_n .

e) Halla, si existen, cotas superiores e inferiores para a_n .

f) Calcula el límite de a_n .

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{5n^2} \right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1} \right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2+1}$

4. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 2)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + x - 3)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x^2)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5)$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x + 1}$

6. Calcula los límites laterales de las funciones racionales en los puntos en que no están definidas:

a) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

8. Se considera la función: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$. Calcula $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Soluciones propuesta A

1. a) $a_6 = 19, a_7 = 33, a_8 = 25, a_n = 3n + 1$
 b) $a_6 = \frac{11}{12}, a_7 = \frac{13}{14}, a_8 = \frac{15}{16}, a_n = \frac{2n-1}{2n}$
 c) $a_6 = 36, a_7 = 49, a_8 = 64, a_n = n^2$
 d) $a_6 = 37, a_7 = 50, a_8 = 65, a_n = n^2 + 1$

2. a) $a_0 = 2, a_1 = 2^{\frac{1}{2}}, a_2 = 2^{\frac{1}{4}},$
 $a_3 = 2^{\frac{1}{8}}, a_4 = 2^{\frac{1}{16}}, a_5 = 2^{\frac{1}{32}}$
 b) $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2^n} = k \Rightarrow \log_2 k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow k = 1$

El límite de la sucesión es 1.

- d) Está acotada superiormente por $a_0 = 2$ e inferiormente por su límite, 1.

3. a) $a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = \frac{11}{3}$
 $3 + \frac{2}{s} = \frac{28}{9} \Leftrightarrow \frac{2}{s} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow s = 18$
 b) $a_{n+1} - a_n = \left(3 + \frac{2}{n+1}\right) - \left(3 + \frac{2}{n}\right) = \frac{-2}{(n+1)n} < 0$

La sucesión es estrictamente decreciente.

- c) $\lim a_n = \lim \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3 + 0 = 3$
 $|a_n - 3| < \varepsilon; \left|3 + \frac{2}{n} - 3\right| < 0,001 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n}\right| < 0,001$
 $2 < 0,001n \Rightarrow n > 2000$. A partir de a_{2000} .

4. a) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - 4n}{n^2 - 1} = -2$
 b) $l = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$
 c) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{3n} = -\infty$
 d) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 2n}} = \frac{3}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{3}{2}$
 e) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$
 f) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2n^2} = \frac{1}{4}$

5. a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = +\infty$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(x-3)}{x(x-1)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x-1} = 3$

6. a) -1
 b) -20
 c) $+\infty$
 d) $-\infty$
 e) $-\infty$
 f) $+\infty$

7. Estos límites son del tipo $\frac{0}{0}$:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{12+x}+4)}{x-4(\sqrt{12+x}-4)(\sqrt{12+x}+4)(\sqrt{x}+2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{12+x}+4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{12+x}+4)}{(\sqrt{x}+2)} = 2$

8. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{-x-1}\right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{+x-1}\right) = 1$$

9. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3-x^2-2x)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{0}{32} = 0$

Soluciones propuesta B

1. a) $a_6 = -5$, $a_7 = -8$, $a_8 = -11$, $a_n = 13 - 3n$
 b) $a_6 = \frac{12}{13}$, $a_7 = \frac{14}{15}$, $a_8 = \frac{16}{17}$, $a_n = \frac{2n}{2n+1}$
 c) $a_6 = 216$, $a_7 = 343$, $a_8 = 512$, $a_n = n^3$
 d) $a_6 = 215$, $a_7 = 342$, $a_8 = 511$, $a_n = n^3 - 1$

2. a) $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3^2}$, $a_3 = -\frac{1}{3^3}$,

$$a_4 = \frac{1}{3^4}, a_5 = -\frac{1}{3^5}$$

b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}$

c) $b_n = \frac{1}{3^n}$, $c_n = -\frac{1}{3^n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{-\frac{1}{3^{n+1}}}{-\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}}}{(-1)^n \frac{1}{3^n}} = -\frac{1}{3}$$

b_n y c_n son progresiones geométricas de

razón $r = \frac{1}{3}$. a_n es una progresión

geométrica de razón $r = -\frac{1}{3}$.

- d) Como se puede ver en los primeros términos, a_n es oscilante.

- e) Superior: $a_0 = 1$. Inferior: $a_1 = -\frac{1}{3}$.

f) $c_n \leq a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3^n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

3. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2-n+1}{n^2-3n+2}\right) = -1$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{5n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+8n^2}{5n^3+5n^2} = \frac{2}{5}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1}) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n^2+1} + \sqrt{n^2+1}} = +\infty$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+2}{5n-3}\right) \left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)} = (e^{+\infty}) = +\infty$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-8}} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+2n}{2}n}{n^2+1} = 1$

4. a) 4 b) -3 c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$

5. Todos estos límites son del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Simplificando por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = 1$$

b) Simplificando por x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

6. a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{x-3}{x+3}\right) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{x-3}{x+3}\right) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3+3)}{x(x-1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

7. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{(\sqrt{x^2-4}+x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

8. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{-1} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{-1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = +\infty$$

9 Continuidad

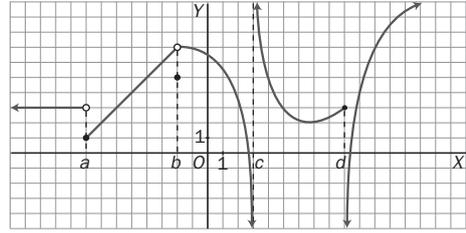
Propuesta A

- Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ y clasifícalos.
- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 6 - x & \text{si } x < -2 \\ 6 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ y efectúa una representación gráfica de la misma.
- Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.
- Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua en todo \mathbf{R} .
- Calcula el verdadero valor de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3}$ en $x = 0$.
- Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones a trozos:
 - $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
- Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x - 6}{2 - \sqrt{x - 2}}$, indica el tipo de discontinuidad, determina el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos y muestra los intervalos en los que la función es continua.
- Demuestra que la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-1, 3]$. ¿Puede afirmarse lo mismo de la función $g(x) = \frac{x^3 - 2}{x - 2}$?
- Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ está acotada en el intervalo $[-2, 2]$. En caso afirmativo calcula su máximo y su mínimo absolutos.
- Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{-1, 1\} \\ \frac{x}{|x| - 1} & \text{si } x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\} \end{cases}$ y calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Demuestra que las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos(\pi x)$ se cortan al menos en un punto cuya abscisa pertenece al intervalo $[0, 2]$.

Propuesta B

1. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$. Indica el tipo de discontinuidad.

2. Indica los intervalos en los que la función $f(x)$, representada a continuación, es continua y clasifica los tipos de discontinuidad que presenta.



3. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y esboza su gráfica.

4. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ sea continua en todo \mathbf{R} .

5. Determina para qué valores de los parámetros a y b la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x + 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ es continua en toda la recta real.

6. Calcula el verdadero valor de la función $f(x) = \frac{\text{sen}^3 x}{\text{tg} x - \text{sen} x}$ en $x = 0$.

7. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y haz su representación gráfica.

8. Para cada una de las siguientes funciones calcula el valor de a que las hace continuas en todo \mathbf{R} .

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

9. Comprueba si la función $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ verifica las condiciones del teorema de Weierstrass en el intervalo $[1, 4]$. ¿Se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo? ¿Se puede asegurar que la función está acotada en todo su dominio? ¿Podría decirse lo mismo de la función $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$?

10. Demuestra que la ecuación $2^x - 4x = 0$ tiene al menos dos soluciones reales.

11. Construye una función adecuada para demostrar, por el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ toma todos los valores del intervalo $[0, 3]$.

Soluciones propuesta A

1. El dominio es $D(f) = \mathbf{R} - \{3\}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)} = 4$,

en $x = 3$ hay límite; la función tiene una discontinuidad evitable y $f(3) = 4$ es su verdadero valor.

2. Para $x \neq -2$ y $x \neq 3$, la función es continua al estar definida por polinomios. Falta estudiar lo que ocurre en $x = -2$ y en $x = 3$.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (6 - x) = 8$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (6) = 6$

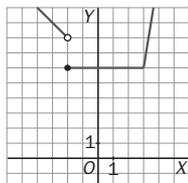
En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito igual a

$6 - 8 = -2$.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (6) = 6$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3) = 6$

En $x = 3$ la función es continua.



3. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 1$, ya que fuera de este punto es continua al estar definida por polinomios.

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1$ y

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 1) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

4. Para ser continua, los límites laterales en $x = 0$ y en $x = 2$ han de coincidir.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow 2 = \sqrt{b} \Rightarrow b = 4$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow \sqrt{2a + 4} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2a + 4} = \sqrt{2} \Rightarrow a = -1$.

5. El verdadero valor debe coincidir con el límite de la función en ese punto.

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9} + 3)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{\sqrt{9} + 3}{\sqrt{1} + 1} = 3$

6. a) $f(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

En $x = 0$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$. Es

continua en $x = 1$ ya que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

$f(3) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$

Es discontinua en $x = 3$ con una discontinuidad inevitable de salto finito.

7. El dominio de la función es $D(f) = [2, 6) \cup (6, +\infty)$, por lo que hay que estudiar su límite en $x = 6$.

$\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x-6}{2-\sqrt{x-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(2+\sqrt{x-2})}{6-x} = -4$

Como tiene límite, la discontinuidad es evitable y su verdadero valor es $f(6) = -4$. Así, la función es continua en el intervalo $[2, +\infty)$.

8. La función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ es continua y tiene distinto signo en los extremos de $[-1, 3]$, ya que $f(-1) = -6 < 0$ y $f(3) = 14 > 0$. Por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c \in (-1, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

Este razonamiento no es válido para la función g , ya que no es continua en el intervalo $[-1, 3]$ puesto que no está definida en $x = 2$; sin embargo, se puede observar directamente que la función corta al eje de abscisas:

$0 = \frac{x^3 - 2}{x - 2} \Rightarrow x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \in [-1, 3]$

9. Se estudia la continuidad de la función en $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 1) = -1$, $f(0) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ continua en $[-2, 2] \Rightarrow f$ acotada. Por el teorema de Weierstrass f alcanza en dicho intervalo su máximo y su mínimo absolutos.

Como la función decrece en $(-2, 0)$ y crece en $(0, 2)$, basta con hallar $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$.

$f(-2) = 3$, $f(0) = -1$ y $f(2) = 3$, por lo que el máximo es 3 y se alcanza en los extremos del intervalo. El mínimo, -1 , se da en $x = 0$.

10. Se estudia la función en los valores que anulan el denominador: $|x| - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$

f es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$ con una discontinuidad inevitable de salto infinito.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x-1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x-1} = 1$

11. Si se cortan $\Rightarrow \exists c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = g(c)$.

Se construye la función $F(x) = f(x) - g(x)$ que es continua en el intervalo $[0, 2]$ y además $F(0) = -4 < 0$ y $F(2) = 8 > 0$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in (0, 2)$ que anulará la función, F , es decir $F(c) = f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$.

Soluciones propuesta B

1. El dominio de f es $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable, pues:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

El verdadero valor es $f(2) = \frac{5}{3}$.

En $x = -1$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+3}{x+1} = -\infty$$

2. La función es continua en $\mathbf{R} - \{a, b, c, d\}$.

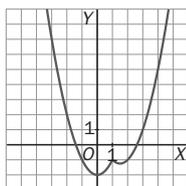
$x = a$: discontinuidad inevitable de salto finito.

$x = b$: discontinuidad evitable ya que los límites laterales coinciden pero son distintos de $f(b)$.

$x = c, x = d$: discontinuidades inevitables de salto infinito.

3. Para $x \neq 1$, f es continua pues está definida por polinomios. Para $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 1) \end{aligned}$$



Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$, la

función es continua en \mathbf{R} .

4. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 2$;

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3 + 3a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 1) = \ln 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

5. Para que la función sea continua en todo \mathbf{R} , ha de ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = \sin 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + ax + b) = b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + ax) = 9 + 3a \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 9) = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

6. El verdadero valor es, si existe, el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^3 x}{\operatorname{tg} x - \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos^2 x) \cos x}{\sin x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x (1 + \cos x) = 2$$

Luego el verdadero valor es $f(0) = 2$.

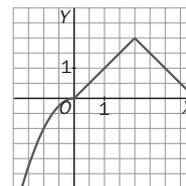
7. Posibles discontinuidades en $x = 1$ y $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x|x| = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1; f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4 - x) = 2; f(2) = 2$$



Por tanto, la función es continua en todo \mathbf{R} .

8. a) Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

b) Para que sea continua en $x = 3$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 13; \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9 - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 9 - a \Rightarrow a = -4$$

9. La función es continua en su dominio, $D = \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow$ es continua en el intervalo $[1, 4]$.

Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo; sin embargo, no está acotada en el dominio, ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = +\infty.$$

La función $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$ es continua en toda la

recta real y como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = 1$

y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow f$ está acotada.

10. Se considera la función continua en toda la recta real $f(x) = 2^x - 4x$, y como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -2 < 0$, por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c \in (0, 1)$ que verifica $f(c) = 0$, es decir, $x = c$ es una solución de la ecuación $2^x - 4x = 0$. Además, $x = 4$ es otra solución porque $2^4 - 4 \cdot 4 = 0$.

11. $\forall y_0 \in (0, 3)$ se construye $g(x) = f(x) - y_0$, que es continua. $g(-1) = f(-1) - y_0 = 0 - y_0 < 0$;

$$g(2) = f(2) - y_0 = 3 - y_0 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (-1, 2) / g(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$$

Además, $f(-1) = 0$ y $f(2) = 3$.

10 Derivadas

Propuesta A

- Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 4$ en los intervalos $[0, 2]$ y $[a, a + h]$.
- Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indican.
 - $f(x) = x^3 + 1$ en $x = -1$
 - $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en $x = -2$
 - $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x = 2$
- Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas? ¿Cuál es su ecuación?
 - $f(x) = x^2 + x - 1$ en $x = 1$
 - $f(x) = \frac{2}{x+3}$ en $x = -1$
- Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de las que se conoce $f(2) = 3$, $g(2) = -1$, $g'(-1) = -3$, $g'(2) = 0$, $g'(3) = 5$, $f'(-1) = 2$ y $f'(2) = 4$, calcula:
 - $(f+g)'(-1)$
 - $(f \cdot g)'(2)$
 - $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$
 - $(f \circ g)'(2)$
 - $(g \circ f)'(2)$
- Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 0$.
- Si $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, $h(x) = x^2$, calcula:
 - $(g \circ h)'(2)$
 - $(h \circ g \circ f)'(1)$
 - $(f \circ h \circ g)'(4)$
 - $(g \circ f \circ h)'(x)$
- Se considera la función $f(x) = x^3 + x - 11$. Calcula la derivada de la función inversa de $f(x)$ en $x = -9$.
- Halla la función derivada de las siguientes funciones trigonométricas:
 - $a(x) = \sin^2(x)$
 - $b(x) = \arcsen(2x)$
 - $c(x) = \arccos^2(x)$
 - $d(x) = \arccos(x^2)$
 - $e(x) = \operatorname{tg}(2x)$
 - $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{2}{x}\right)$.
- Calcula la derivada de las funciones:
 - $a(x) = \ln(x \cdot \cos x)$
 - $b(x) = \ln x \cdot \cos x$
 - $c(x) = \cos(x \cdot \ln x)$
 - $d(x) = e^{2x}$
 - $e(x) = x \cdot e^x$
 - $f(x) = e^{\ln x}$
 - $g(x) = 2^x \cdot x^2$
 - $h(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{x}}$.
- La posición respecto del origen, en metros, de un móvil viene dada por la función $s(t) = 3t^2 - 1$, donde el tiempo t viene dado en segundos.
 - Halla la velocidad media del móvil en el intervalo temporal $[1, 4]$.
 - Obtén la velocidad instantánea para $t = 2$ segundos.
- Teniendo en cuenta que $\ln(50) \approx 3,912$, calcula mediante aproximación con diferenciales $\ln(54)$, $\ln(46)$ y $\ln(40)$. Compara los resultados obtenidos con los que se obtienen con la calculadora y halla el error relativo que se comete en cada caso. ¿Por qué se comete más error en unos casos que en otros?
- Se tiene un globo esférico de radio $r = 2$ m. Por efecto de la dilatación de los gases que contiene, su radio aumenta un $dr = 3$ cm. ¿Cuánto ha aumentado su volumen?

Propuesta B

- Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^3$ en los intervalos $[-3, 1]$ y $[a, a + h]$.
- Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indica.
 - $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 3$
 - $f(x) = \frac{x-1}{x}$ en $x = -2$
 - $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$
- Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas? Halla la ecuación de la normal.
 - $f(x) = 3x + 2$ en $x = 2$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ en $x = 0$
- Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de las que se conoce $f(2) = g(2) = 1$, $g'(1) = -\frac{3}{4}$, $g'(2) = -\frac{1}{3}$, $f'(1) = 2$ y $f'(2) = 4$, calcula:
 - $(f+g)'(1)$
 - $(f \cdot g)'(2)$
 - $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$
 - $(f \circ g)'(2)$
 - $(g \circ f)'(2)$
- Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo \mathbf{R} .
- Si $f^{-1}(x) = x \cdot e^x$ en $(0, +\infty)$, calcula la derivada de la función $f(x)$ en $x = \ln 4$, es decir, $f'(\ln 4)$, y la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en ese punto.
- Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:
 - $a(x) = \cos^2(x)$
 - $b(x) = \arcsen(x^2)$
 - $c(x) = \cos(2x) \operatorname{tg}(2x)$
 - $d(x) = \sec^2 x$
 - $e(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$
 - $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
- Calcula la derivada de las funciones:
 - $a(x) = 5^{2x}$
 - $b(x) = (x-1)e^x$
 - $c(x) = \ln(e^x)$
 - $d(x) = 3^x \cdot x^3$
 - $e(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$
 - $f(x) = \ln \sqrt{x}$
 - $g(x) = \log\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)$
 - $h(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}}$
- La curva de ecuación $x^3 + 3x^2y + y^2 + 28 = 0$ pasa por el punto $(-2, -2)$. Calcula la derivada de la función y en ese punto. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la curva en ese punto?
- Halla la derivada de las funciones siguientes aplicando la derivación logarítmica.
 - $f(x) = \sqrt[3]{5-4x}$
 - $g(x) = (3x+1)^{2x}$
- Halla la función diferencial de las siguientes funciones:
 - $y = \frac{-7x+4}{x+5}$
 - $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$
- Utiliza diferenciales para aproximar el valor de $3,001^5 - 4 \cdot 3,001^3 - 3 \cdot 3,001$ y compara el resultado con el número obtenido directamente con la calculadora.

Soluciones propuesta A

1. $TVM f[0,2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-(-4)}{2} = 2$
 $TVM f[a, a+h] = \frac{(a+h)^2 - 4 - (a^2 - 4)}{h} = h + 2a$

2. a) $TVI(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^3 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 3h + 3) = 3$

b) $TVI(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-2}{h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{h-1} = 1$

c) $TVI(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}$

3. a) $\operatorname{tg} \alpha = m = f'(1) = 3 \Rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$
 Ecuación de la tangente $y - 1 = 3(x - 1)$

b) $m = f'(-1) = \frac{-2}{(-1+3)^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 153^\circ 26' 6''$
 Ecuación de la tangente: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 1)$

4. a) $(f+g)'(-1) = f'(-1) + g'(-1) = -1$

b) $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 4(-1) + 3 \cdot 0 = -4$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{[g(2)]^2} = -4$

d) $(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(-1)g'(2) = 0$

e) $(g \circ f)'(2) = g'(f(2))f'(2) = g'(-1)f'(2) = -12$

5. Para que sea continua en $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow 1 = b$$

Para que sea derivable en $x = 0$, las derivadas laterales deben coincidir:

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 0 = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

6. $f'(x) = \frac{-1}{2x^2}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $h'(x) = 2x$

a) $(g \circ h)'(2) = g'[h(2)]h'(2) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $(h \circ g \circ f)'(1) = h'[g(f(1))]g'(f(1))f'(1) = -\frac{1}{2}$

c) $(f \circ h \circ g)'(4) = f'[h(g(4))]h'(g(4))g'(4) = -\frac{1}{50}$

d) $(g \circ f \circ h)'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2x^2\sqrt{1+2x^2}}$

7. $f(c) = -9 \Rightarrow c^3 + c - 11 = -9 \Rightarrow c = 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 4$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \text{ . Derivando:}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(-9) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-9))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

8. a) $a'(x) = \operatorname{sen} 2x$ d) $d'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

b) $b'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ e) $e'(x) = 2 \sec^2(2x)$

c) $c'(x) = \frac{-2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $f'(x) = \frac{-2}{x^2} \sec^2\left(\frac{2}{x}\right)$

9. a) $a'(x) = -\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ e) $e'(x) = e^x(x+1)$

b) $b'(x) = \frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \operatorname{sen} x$ f) $f'(x) = 1$

c) $c'(x) = -(1 + \ln x) \operatorname{sen}(x \ln x)$

d) $d'(x) = 2e^{2x}$ g) $g'(x) = 2^x(\ln 2 \cdot x^2 + 2x)$

h) $h(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2} \ln x \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{2x}$

10. a) $v_m = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{47 - 2}{3} = 15 \text{ ms}^{-1}$

b) $v_i = s'(2) = 6 \cdot 2 = 12 \text{ ms}^{-1}$

11. $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}$, $f(x+dx) \approx f(x) + dy$

$$\ln(54) \approx \ln(50) + \frac{1}{50} \cdot 4 = 3,912 + 0,08 = 3,992$$

$$Er = \frac{|3,992 - 3,98898|}{3,98898} = 0,0756\%$$

$$\ln(46) \approx \ln(50) + \frac{1}{50}(-4) = 3,912 - 0,08 = 3,832$$

$$Er = \frac{|3,832 - 3,82864|}{3,82864} \cdot 100 = 0,0877\%$$

$$\ln(40) \approx \ln(50) + \frac{1}{50}(-10) = 3,912 - 0,2 = 3,712$$

$$Er = \frac{|3,712 - 3,68888|}{3,68888} \cdot 100 = 4,96\%$$

cuanto más lejos de $x = 50$, mayor es el error.

12. $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, $dV = 4 \pi r^2 dr$

$$\Delta V \approx dV = 4 \pi 2^2 \cdot 0,03 = 1,508 \text{ m}^3$$

Soluciones propuesta B

$$1. \quad TVM \quad f[-3,1] = \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} = \frac{1-(-27)}{4} = 7$$

$$TVM \quad f[a, a+h] = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = h^2 + 3ha + 3a^2$$

$$2. \quad a) \quad TVI(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 1 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$b) \quad TVI(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2+h-1-3}{-2+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(h-2)} = \frac{1}{4}$$

$$c) \quad TVI(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}$$

$$3. \quad a) \quad m = f'(2) = 3 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$$

$$\text{Ecuación de la normal: } y - 8 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$b) \quad m = f'(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2+1}} = 0 = \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$$

La tangente es horizontal y la normal es la recta vertical $x = 0$.

$$4. \quad a) \quad (f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 2 + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$b) \quad (fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = \frac{11}{3}$$

$$c) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{[g(2)]^2} = \frac{13}{3}$$

$$d) \quad (f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(1) g'(2) = -\frac{2}{3}$$

$$e) \quad (g \circ f)'(2) = g'(f(2)) f'(2) = g'(1) f'(2) = -3$$

5. Si $x \neq 1$, f es derivable al estar definida por polinomios. Para que sea continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b - 1 = 2b - 2 \Rightarrow a = b - 1$$

Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales deben coincidir:

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2a + b = 2b \Rightarrow 2a - b = 0$$

$$\text{Y de aquí: } \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2$$

$$6. \quad f^{-1}(c) = \ln 4 \Rightarrow c \cdot e^c = \ln 4 \Rightarrow c = \ln 2$$

$$(f^{-1})'(x) = e^x(1+x) \Rightarrow (f^{-1})'(\ln 2) = 2(1+\ln 2)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x. \text{ Derivando la función}$$

compuesta:

$$(f^{-1})'(f(x)) f'(x) = 1 \Rightarrow f'(\ln 4) =$$

$$= \frac{1}{(f^{-1})'(f(\ln 4))} = \frac{1}{(f^{-1})'(\ln 2)} = \frac{1}{2(1+\ln 2)}$$

$$\text{Ec. tangente: } y - \ln 2 = \frac{1}{2(1+\ln 2)}(x - \ln 4)$$

$$7. \quad a) \quad a'(x) = -\operatorname{sen} 2x \quad c) \quad c'(x) = 2 \cos(2x)$$

$$b) \quad b'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \quad d) \quad d'(x) = 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$$

$$e) \quad e'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

$$f) \quad f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$8. \quad a) \quad a'(x) = 2 \ln 5 \cdot 5^{2x} \quad e) \quad e'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x^2)}$$

$$b) \quad b'(x) = x \cdot e^x \quad f) \quad f'(x) = \frac{1}{2x}$$

$$c) \quad c'(x) = 1 \quad g) \quad g'(x) = \frac{-2x+3}{(x^2-3x)} \cdot \frac{1}{\ln 10}$$

$$d) \quad d'(x) = 3^x x^2 (x \ln 3 + 3)$$

$$h) \quad h(x) = \frac{1}{2} [\ln(1 - \operatorname{sen} x) - \ln(1 + \operatorname{sen} x)]$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \right] = -\frac{1}{\cos x}$$

$$9. \quad 3x^2 + 6xy + 3x^2y' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-3x^2 - 6xy}{3x^2 + 2y}$$

$$f'(-2, -2) = -\frac{9}{2}. \text{ Ecuación: } y + 2 = -\frac{9}{2}(x + 2)$$

$$10. \quad a) \quad \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(5 - 4x) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \ln(5 - 4x) + \frac{-4}{x(5 - 4x)}$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{5 - 4x} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(5 - 4x) + \frac{-4}{x(5 - 4x)} \right]$$

$$b) \quad \ln g(x) = 2x \cdot \ln(3x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = (3x + 1)^{2x} \left[2 \ln(3x + 1) + \frac{6x}{3x + 1} \right]$$

$$11. \quad a) \quad dy = \frac{-39}{(x+5)^2} dx$$

$$b) \quad dx = A \omega \cos(\omega t + \phi_0) dt$$

$$12. \quad f(3 + dx) = f(3) + \Delta y \approx f(3) + dy$$

$$dy = (5x^4 - 12x^2 - 3) dx; \quad dy(3) = 294 dx$$

$$f(3,001) = 3,001^5 - 4 \cdot 3,001^3 - 3 \cdot 3,001 \approx$$

$$\approx f(3) + dy = 126 + 294 \cdot 0,001 = 126,294$$

11 Funciones derivables

Propuesta A

- La función $f(x) = \sqrt{\ln(\cos x)}$ existe para infinitos valores de x , pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?
- Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |x^3 - 3x^2| + 5x - 3$ haciendo un estudio especial en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.
- Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ que sea paralela a la recta de ecuación $3x - y + 1 = 0$. ¿Cuál es el punto de tangencia?
- Dada la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$, halla el valor medio establecido por el teorema de Lagrange en el intervalo $[1, 3]$.
- Calcula el valor de m , n y k , con $k < 0$, para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[k, 1]$ y determina el valor $x = c$ que verifica la tesis del teorema.
- Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[-1, 2]$ y halla el valor intermedio correspondiente.
- Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 6x}$	c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x}{1 - \cos^2 x}$
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1}$	d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$
- De todos los sectores circulares de perímetro 4, determina la amplitud y el radio del que tiene área máxima.
- La producción de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura del mismo, según la expresión $Q(x) = (x + 1)^2(32 - x)$ en donde x representa la temperatura en °C y $Q(x)$ la producción de hortalizas en kg. Se prevé que la temperatura no pueda bajar de 0 °C para evitar las heladas.
 - ¿Cuál deberá ser la temperatura óptima del invernadero para obtener la mayor cantidad de hortalizas?
 - ¿Qué cantidad de hortalizas se obtendrá en este último caso?
- Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$	b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$
---------------------------------------	---------------------------------
- Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$	b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$
-----------------------------	---------------------------------

Propuesta B

1. La función $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$ existe para infinitos valores de x , pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?
2. Determina el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} kx - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 - 3x^2 + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea derivable en $x = 2$ y, si fuera posible, calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en ese punto.
3. Desde el punto $P(1, 0)$ se trazan las tangentes a la curva de ecuación $y = x^2 + 2$. Determina los puntos de tangencia y las ecuaciones de dichas tangentes.
4. Determina la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ y $C(-2, 7)$ y halla un punto en el segmento de parábola de extremos A y B en el que la tangente a la curva sea paralela a la cuerda determinada por A y B .
5. Calcula el valor de a , b y k , con $k > 1$, para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + b(x-1) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, k]$ y determina el valor $x = c$ que verifica la tesis del teorema.
6. Demuestra que para cualquier número real p , la ecuación $2x^5 + x + p = 0$ tiene una y solamente una solución real.
7. Calcula los límites:
 - a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{3x^2 + 6x}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \sin 2x}$
 - d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$
8. Dado un segmento $AC = a$, divídelo en dos partes AB y BC de modo que construyendo un cuadrado $ABED$ sobre AB y un triángulo equilátero BCF sobre BC la suma de sus áreas sea mínima.
9. Halla, utilizando métodos de optimización de funciones, la distancia del punto $P(2, 1, 6)$ a la recta de ecuación $r : \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -2 + k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$. Determina el punto de la recta más próximo al punto P .
10. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:
 - a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$
 - b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
11. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:
 - a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$
 - b) $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$

Soluciones propuesta A

- El dominio $D(f) = \{x \in \mathbf{R}, x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.
- La función es composición del valor absoluto y funciones polinómicas; por tanto, es continua en todo \mathbf{R} y derivable excepto, quizás, en $x = 0$ y en $x = 3$, valores que anulan el polinomio afectado por el valor absoluto.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 + 3x^2 + 5x}{x} = 5$$

En $x = 3$ se estudian las derivadas laterales.

$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^3 + 3x^2 + 5x - 15}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(5-x^2)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (5-x^2) = -4$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 15}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x^2 + 5)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + 5) = 14$$

Por tanto, f es derivable en $\mathbf{R} - \{3\}$.

- $m = f'(a) \Rightarrow 3 = 2a - 5 \Rightarrow a = 4$
 $f(a) = f(4) = 2$. El punto de tangencia es $(4, 2)$ y la recta tangente $y - 2 = 3(x - 4)$.
- La función $f(x)$ es continua y derivable porque es polinómica, por tanto, existe $c \in [1, 3]$ tal que $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 4}{2} = 16 = f'(c) = 6c + 4 \Rightarrow c = 2 \in (1, 3)$

- La función debe ser continua en $[k, 1]$ y derivable en $(k, 1)$. Basta con estudiar en $x = 0$:
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 3 = n$
 $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 0 = m$

Además $f(k) = f(1) \Rightarrow 3k^2 + 3 = 4 \Rightarrow k = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

El valor de c que verifica la tesis es $c = 0$, ya que $0 \in \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 1\right)$ y $f'(0) = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \frac{a}{-2} = 1 + b$
 $f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow \frac{-a}{4} = 2 \Rightarrow a = -8, b = 3$
 $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{7 - 2}{3} = \frac{5}{3} = f'(c)$.

Hay dos posibilidades: $\frac{5}{3} = \frac{8}{(c-3)^2} \Rightarrow c = 3 \pm \sqrt{\frac{24}{5}}$

Pero solo $c = 3 - \sqrt{\frac{24}{5}} \in (-1, 1)$

De la otra posibilidad, $\frac{5}{3} = 2c \Rightarrow c = \frac{5}{6} \notin (1, 2)$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 8x - 12}{2x - 6} = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^{2x} - e^x - 1}{2e^{2x}} = -1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \sin x}{2 \sin x \cos x} = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2e^x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2e^x(e^x - 1) + 2e^x e^x} = \frac{1}{2}$

- $S = \frac{r^2 \alpha}{2}$. Pero $2r + \alpha r = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4 - 2r}{r}$
 $S = \frac{1}{2} r^2 \frac{4 - 2r}{r} = 2r - r^2 \Rightarrow S' = 2 - 2r$

El dominio de la función es $(0, 2)$ y la derivada se anula para $r = 1$ y $S''(1) < 0$, por lo que hay un máximo relativo para $r = 1$ y $\alpha = 2$.

- El dominio es $D(f) = [0, 32]$ ya que no puede haber una producción negativa. La derivada es $Q'(x) = 3(x + 1)(21 - x)$, que se anula para $x = 21 \in D(f)$. Como $Q(0) = 32$, $Q(21) = 5324$ y $Q(32) = 0$, la máxima producción es 5324 kg y se consigue a 21 °C.
- a) $D(f) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-4 + 3x}{x^3}$$

	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
f''	-	+	
f	\cap	\cup	

Punto de inflexión: $\frac{4}{3}$

- $D(f) = \mathbf{R}$

$$f'(x) = \frac{2x - x^2 - 1}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{e^x}$$

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f''	+		+	
f	\cup	\cap	\cup	

Ptos. de inflexión: 1, 3

- a) $D(f) = (0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

	0	e	$+\infty$
f'	+	-	
f	crece	decrece	

Máximo relativo: e

- $D(f) = \mathbf{R}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	+	
f	decrece	crece	

Mínimo relativo: 1

Soluciones propuesta B

1. El dominio, $D(f) = \{x \in \mathbf{R}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.

2. Para que sea derivable ha de ser continua.
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 2k - 4 = 2 \Rightarrow k = 3$

Para $k = 3$, $f'(2^-) = -1$ y $f'(2^+) = 0$, f no es derivable en $x = 2 \Rightarrow$ no tiene tangente.

3. Las tangentes en el punto $A(a, f(a))$ tienen una pendiente $m = f'(a) = 2a$, luego su ecuación es $y = 2a(x - 1)$ ya que pasa por el punto $(1, 0)$. La intersección de la tangente con la curva tiene que ser un único punto.

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2a(x - 1) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2ax + 2(a + 1) = 0. \text{ Como}$$

la solución es doble, el discriminante es cero: $4a^2 - 8(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$

Para $a = 1 + \sqrt{3}$, el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente, $A(1 + \sqrt{3}, 6 + 2\sqrt{3})$ e $y = (2 + 2\sqrt{3})(x - 1)$.

Para $a = 1 - \sqrt{3}$ el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente, $A(1 - \sqrt{3}, 6 - 2\sqrt{3})$ e $y = (2 - 2\sqrt{3})(x - 1)$.

4. La ecuación será $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\text{Resolviendo el sistema } \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 4a - 2b + c = 7 \end{cases}$$

se obtiene $f(x) = x^2 - x + 1$.

$$\frac{3-1}{2-0} = f'(c) \Rightarrow 1 = 2c - 1 \Rightarrow c = 1 \in (0, 2)$$

5. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = a + 4 \Rightarrow a = -1$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 3 = -2 + b \Rightarrow b = 5$$

$$f(-2) = f(k) \Rightarrow -6 = -k^2 + 5(k - 1) + 4 \Rightarrow k = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow -2c + 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in \left(-2, \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}\right)$$

6. Si se considera la función $f(x) = 2x^5 + x + p$ cuya derivada, $f'(x) = 10x^4 + 1 > 0 \forall x$, indica que es monótona creciente. Como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 + x + p) = -\infty$$

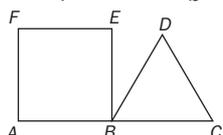
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 + x + p) = +\infty$, la función corta solo una vez al eje de abscisas.

7. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{3x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 8x + 4}{6x + 6} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x - 1}{1 - 2 \cos 2x} = -1$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln \frac{a}{b}$

8. Llamando $x = BC$, $AB = a - x$
 Lado del cuadrado: $l = a - x$

 Área total = Área triángulo + Área cuadrado:
 $S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + (a - x)^2$, con $D = (0, a)$
 $S' = \frac{\sqrt{3}}{2} x - 2(a - x) = 0 \Rightarrow x_a = \frac{4a}{4 + \sqrt{3}}$. Como

$$S(0) = a^2 > S(a) = \frac{\sqrt{3} a^2}{4} > S(x_a) = \frac{4\sqrt{3} + 9}{(4 + \sqrt{3})^2} a^2$$

$$\text{Área mínima: } AB = \frac{\sqrt{3}a}{4 + \sqrt{3}}, BC = \frac{4a}{4 + \sqrt{3}}$$

9. Punto genérico de r : $A(1 - 2k, -2 + k, 2 + 2k)$. Hay que minimizar

$$d(k) = |PA| = \sqrt{(-1 - 2k)^2 + (-3 + k)^2 + (-4 + 2k)^2}$$

$$d'(k) = \frac{9(k - 1)}{\sqrt{9k^2 - 18k + 26}} = 0 \Rightarrow k = 1, \text{ que da}$$

el mínimo de $d(k)$: $d(P, r) = \sqrt{17}$ y $A(-1, -1, 4)$.

10. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 5)^2}}$

$$f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2 - 2x + 5)^3}} > 0 \forall x \in \mathbf{R}$$

f no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia arriba (\cup) en todo \mathbf{R} .

b) $D(f) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

	$-\infty$	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
f''	-	+	
f	\cap	\cup	

Inflexión: $\sqrt{e^3}$

11. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{-(x - 1)^2}{e^x} \leq 0 \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ siempre decrece y no tiene extremos relativos.

b) $D(f) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	crece	decrece	crece	

Máximo relativo: 1
Mínimo relativo: 2

12 Representación de funciones

Propuesta A

1. Determina el dominio, los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^3+3x^2}$

b) $g(x) = \ln(\sin(2x))$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

a) $f(x) = 1 + \operatorname{tg} x$

b) $g(x) = \frac{2-e^x}{2+e^x}$

3. Determina el período de las funciones:

a) $f(x) = \sin 3x$

b) $g(x) = 4 \cos 2x + \sin 3x$

4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-9}$

b) $g(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{x \cos x}$

c) $h(x) = \ln(x^2-1)$

5. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^2}$

b) $g(x) = \frac{4+e^x}{1-e^x}$

6. Representa conjuntamente las gráficas de las funciones polinómicas $f(x) = \frac{1}{3}(x^3-3x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

7. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y represéntalas.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

b) $g(x) = 3(x-1) - (x-1)^3$

8. Representa las siguientes funciones racionales e irracionales tras realizar el estudio completo de las mismas.

a) $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$

b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2-x-6}$

9. Haz un estudio completo y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x+2)e^x$

b) $g(x) = \ln(x^2+x-2)$

10. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones trigonométricas y represéntalas.

a) $f(x) = \cos^2 x \sin x$

b) $g(x) = \sin x \operatorname{tg} x$

11. La gráfica de la derecha corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

a) $-f(x)$

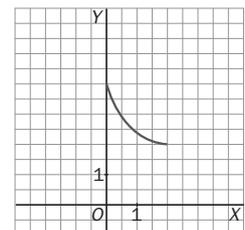
c) $2 + f(x)$

e) $f^{-1}(x)$

b) $2f(x)$

d) $f(x+2)$

f) $f\left(\frac{x}{2}\right)$



Propuesta B

1. Determina el dominio, los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$ b) $g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

a) $f(x) = 2 - \ln(x-1)$ b) $g(x) = \frac{x+2}{e^x}$

3. Determina el período de las funciones:

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ b) $g(x) = \left(\frac{x}{2} - \text{Ent}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln|x^2-5|}{x}$ b) $g(x) = \frac{x^3+2x}{x^2-1}$ c) $h(x) = \text{tg}(x^2+1)$

5. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$ b) $g(x) = \sqrt{x^2-x}$

6. Representa conjuntamente las gráficas de las funciones polinómicas $f(x) = \frac{1}{4}(4x^2 - x^4)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ y compara el signo de $f'(x)$ y $f''(x)$ con el crecimiento y la curvatura de $f(x)$.

7. Representa las siguientes funciones polinómicas tras realizar un estudio completo de las mismas.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ b) $g(x) = (x+1) - (x+1)^3$

8. Haz el estudio completo y representa las siguientes funciones racionales e irracionales.

a) $f(x) = \frac{x-4}{2x+4}$ b) $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$ c) $h(x) = \sqrt{9-x^2}$

9. Realiza el estudio de las funciones siguientes y represéntalas.

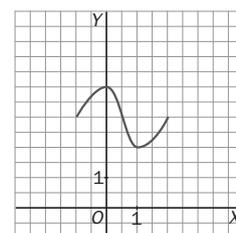
a) $f(x) = (x^2-1)e^x$ b) $g(x) = \ln(4-x^2)$

10. Representa las siguientes funciones trigonométricas tras realizar su estudio completo.

a) $f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$ b) $g(x) = \sin^2 x \cos x$

11. La gráfica de la derecha corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

a) $-f(x)$ c) $f(x) - 3$ e) $f^{-1}(x)$
 b) $\frac{f(x)}{2}$ d) $f(x+3)$ f) $f(2x)$



Soluciones propuesta A

1. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 0\}$. Es continua en todo D .

$$f'(x) = \frac{2(3-x)^2}{x^3(x+3)^2} \Rightarrow \text{puntos singulares y}$$

$$\text{críticos: } x = \pm\sqrt{3}$$

b) $D(f) = \{x \in \mathbf{R} / \sin 2x > 0\} = \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$

Continua en $D(f)$. $g'(x) = 2 \cot g(2x) \Rightarrow$ pto.

singulares y críticos: $x = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbf{Z}$

2. a) Eje X: $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right), k \in \mathbf{Z}$. Eje Y: $(0, 1)$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$$

b) Eje X: $(\ln 2, 0)$. Eje Y: $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

$$g(x) > 0 \text{ si } x \in (2, +\infty)$$

3. a) $f(x) = \sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$\text{Período } T = \frac{2\pi}{3}$$

b) $g(x) = 4 \cos 2x + \sin 3x = g_1(x) + g_2(x)$

$$T_1 = \pi, T_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 2\pi$$

4. a) $f(-x) = \frac{-x^3 + 2x^2}{x^2 - 9} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ Ni par ni impar

b) $g(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{-x \cos(-x)} = -g(x) \Rightarrow$ Impar

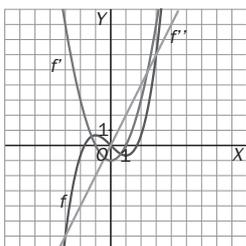
c) $h(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = h(x) \Rightarrow$ Par

5. a) $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^2} = 2x - \frac{2x}{x^2+1}$. Solo tiene la asíntota oblicua $y = 2x$.

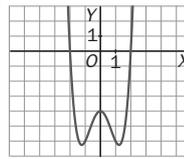
b) Vertical en $x = 0$, al ser $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \pm\infty$.

$$\text{Horizontales: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4+e^x}{1-e^x} = 4 \Rightarrow y = 4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4+e^x}{1-e^x} = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

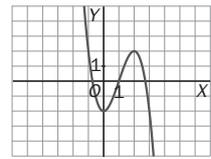
6.



7. a)



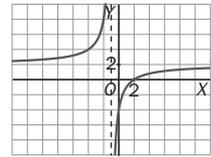
b)



8. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$

Cortes: $(2, 0), (0, -4)$

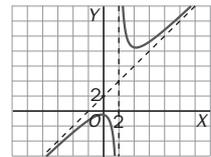
AV: $x = -1$, AH: $y = 2$



b) $D(g) = \mathbf{R} - \{2\}$

Cortes: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

AV: $x = 2$, AO: $y = x + 2$

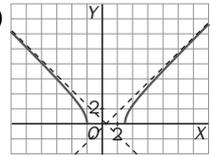


c) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Cortes: $(-2, 0), (3, 0)$

AO: $y = x - \frac{1}{2}$, si $x \rightarrow +\infty$

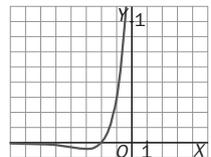
$y = \frac{1}{2} - x$, si $x \rightarrow -\infty$



9. a) $D(f) = \mathbf{R}$

Cortes: $(-2, 0), (0, 2)$

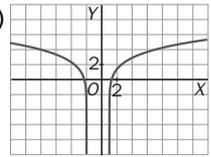
AH: $y = 0$, si $x \rightarrow -\infty$



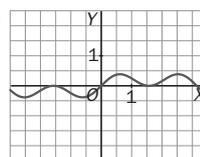
b) $D(g) = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Cortes: no hay

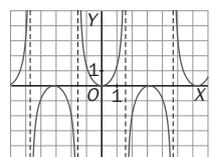
AV: $x = -2, x = 1$



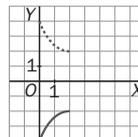
10. a)



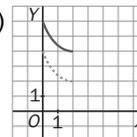
b)



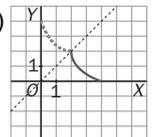
11. a)



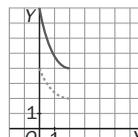
c)



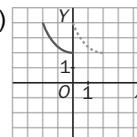
e)



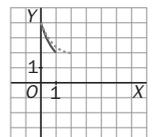
b)



d)



f)



Soluciones propuesta B

1. a) $D(f) = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$. Continua en $D(f) - \{3\}$. $f'(x) = \frac{5}{2}(x+2)^{\frac{3}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow$ no hay puntos singulares. Tampoco hay críticos.

b) $D(g) = [3, +\infty)$. Continua en $D(g) - \{3\}$.

$g'(x) = \frac{5}{2}(x+2)^{\frac{3}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow$ no hay puntos singulares. Tampoco hay críticos.

2. a) Eje X: $(1+e^2, 0)$. Eje Y: no hay.

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (1, 1+e^2)$$

b) Eje X: $(-2, 0)$. Eje Y: $(0, 2)$

$$g(x) > 0 \text{ si } x \in (2, +\infty)$$

3. a) $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos x = f_1(x) + f_2(x)$

$$T_1 = \pi, T_2 = 2\pi \Rightarrow T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 2\pi$$

b) $T = 2$ porque

$$\begin{aligned} h(x+2) &= \left(\frac{x+2}{2} - \text{Ent} \left(\frac{x+2}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \text{Ent} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) = \frac{x}{2} - \text{Ent} \left(\frac{x}{2} \right) = h(x) \end{aligned}$$

4. a) $f(-x) = \frac{\ln|x^2-5|}{-x} = -f(x) \Rightarrow$ Impar

b) $h(-x) = \frac{-x^3-2x}{x^2-1} = -h(x) \Rightarrow$ Impar

c) $h(-x) = \text{tg}((-x)^2+1) = h(x) \Rightarrow$ Par

5. a) Vertical en $x = 0$, ya que

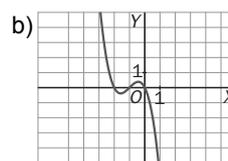
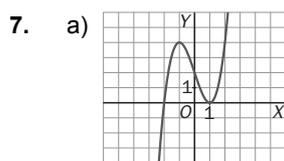
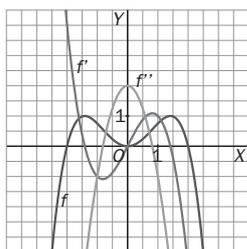
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{2}{x} - 3 \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2-3x \ln x}{x} \right) = -\infty$$

b) $m_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = 1, m_{-} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = -1$

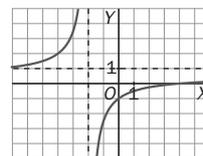
$$n_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2-x} \mp x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\mp x}{\sqrt{x^2-x} \pm x} = \mp \frac{1}{2}$$

Asíntotas oblicuas:
$$\begin{cases} y = x - \frac{1}{2} & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ y = -x + \frac{1}{2} & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

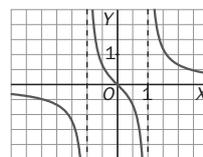
6.



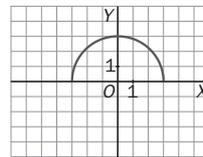
8. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$
Cortes: $(4, 0), (0, -1)$
AV: $x = -2$, AH: $y = \frac{1}{2}$



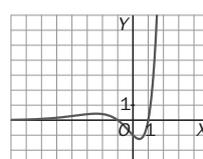
- b) $D(g) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$
Cortes: $(0, 0)$
AV: $x = -1, x = 1$
AH: $y = 0$



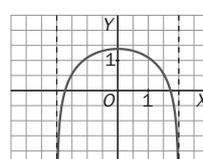
- c) $D(h) = [-3, 3]$
Cortes: $(-3, 0), (3, 0), (0, 3)$



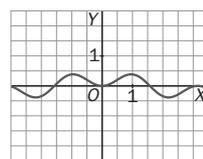
9. a) $D(f) = \mathbf{R}$
Cortes: $(-1, 0), (1, 0), (0, -1)$
AH: $y = 0$, si $x \rightarrow -\infty$



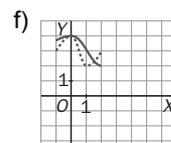
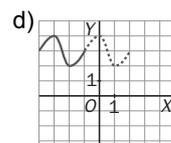
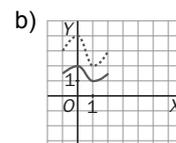
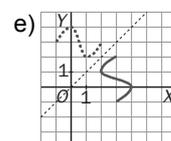
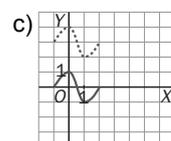
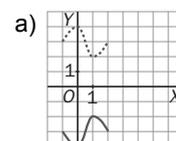
- b) $D(g) = (-2, 2)$
Cortes: $(0, \ln 4)$
AV: $x = -2, x = 2$



10. a)



11.



En el apartado e se representa la correspondencia inversa de f al no existir f^{-1} .

13 Cálculo de primitivas

Propuesta A

- De todas las funciones primitivas de $f(x) = 15x^2 - 2$, escribe la expresión algebraica de la que pasa por el punto $P(-2, -23)$.
- La función $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $M(-3, 17)$ y su derivada segunda es $f''(x) = 6x + 6$. Determina de qué función se trata y halla las coordenadas del punto de inflexión y del mínimo relativo de la misma. ¿En qué punto corta la gráfica de la función al eje de ordenadas?
- En un determinado movimiento se sabe que la aceleración es constante $a = -10 \text{ ms}^{-2}$ y que a los 2 s el móvil se encuentra en una posición $s(2) = 25 \text{ m}$ y lleva una velocidad de 15 m/s. Determina:
 - La expresión de la velocidad en cualquier instante.
 - La velocidad inicial.
 - La expresión de la posición en cualquier instante.
 - La posición inicial.
 - La posición y la velocidad a los 4 segundos.
- Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{6}{x+1} dx$	c) $\int \frac{\cos x}{3 + \sin x} dx$	e) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 \right) dx$	d) $\int x \cdot e^{x^2+2} dx$	f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
- Resuelve aplicando el método de integración por partes las integrales:

a) $\int \cos^2 x dx$	b) $\int (\ln x)^3 dx$	c) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$
-----------------------	------------------------	---------------------------------
- Resuelve por descomposición en fracciones simples las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{4}{x^2-4} dx$	b) $\int \frac{2x-1}{x+2} dx$	c) $\int \frac{2x+2}{(x-1)^2} dx$
------------------------------	-------------------------------	-----------------------------------
- Calcula las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx$	b) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+4} dx$	c) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+5} dx$
-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------
- Calcula las integrales de las funciones racionales con raíces complejas en el denominador:

a) $\int \frac{2x^3}{1+x^2} dx$	b) $\int \frac{1}{x^2-2x+5} dx$	c) $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^3-x^2+x-1} dx$
---------------------------------	---------------------------------	--
- Calcula las integrales de las funciones trigonométricas:

a) $\int \text{tg}^2 x dx$	b) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx$	c) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
----------------------------	--	--------------------------------------
- Calcula las integrales:

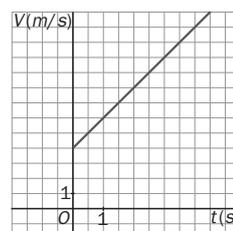
a) $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$	b) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$	c) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$
---------------------------------	--------------------------------------	------------------------------

Propuesta B

1. Escribe la expresión algebraica de la función $F(x)$ sabiendo que $f(x) = F'(x) = \sin x + \cos x$ y que pasa por el punto $Q\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$.

2. La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = 6x^2 - 4x + 5$ y se sabe que la función pasa por el punto $P(1, 0)$. Halla la función y calcula $f(0)$.

3. En un determinado movimiento rectilíneo la velocidad en función del tiempo viene dada por la gráfica de la derecha. Además se sabe que para $t = 4$ s, el móvil se encuentra en la posición $s(4) = 50$ m. Determina:



- a) La velocidad inicial.
- b) La expresión de la velocidad en cualquier instante.
- c) La expresión de la posición en cualquier instante.
- d) La posición inicial.
- e) La aceleración.

4. Calcula las siguientes integrales:

- | | | |
|-----------------------------------|---|---------------------------------|
| a) $\int (10x + \sqrt{x}) dx$ | c) $\int \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg} x} dx$ | e) $\int \frac{5 \ln x}{x} dx$ |
| b) $\int (x^2 + 2\sqrt[3]{x}) dx$ | d) $\int e^x (e^x + 2)^4 dx$ | f) $\int \frac{2x+5}{x^2+1} dx$ |

5. Resuelve aplicando el método de integración por partes a las siguientes integrales:

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ | b) $\int (x+1)e^x dx$ | c) $\int \ln x^2 dx$ |
|--------------------------------------|-----------------------|----------------------|

6. Resuelve por descomposición en fracciones simples las integrales de las funciones racionales:

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| a) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$ | b) $\int \frac{2x+1}{x+4} dx$ | c) $\int \frac{x+2}{(x+1)^2} dx$ |
|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|

7. Calcula las integrales de las funciones racionales:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+8} dx$ | b) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+9} dx$ | c) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+10} dx$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|

8. Calcula las integrales de las funciones racionales con raíces complejas en el denominador:

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---|
| a) $\int \frac{2x^2}{4+x^2} dx$ | b) $\int \frac{x}{x^2-2x+5} dx$ | c) $\int \frac{4x^2-x+3}{x^3-x^2+x-1} dx$ |
|---------------------------------|---------------------------------|---|

9. Calcula las integrales de las funciones trigonométricas:

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| a) $\int \sin 3x \cos(2x-5) dx$ | b) $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx$ | c) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^5 x} dx$ |
|---------------------------------|--|--|

10. Calcula las integrales:

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|
| a) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ | b) $\int \frac{3^x}{3^{2x}-1} dx$ | c) $\int x\sqrt{2x+1} dx$ |
|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|

Soluciones propuesta A

- $$F(x) = \int (15x^2 - 2) dx = 5x^3 - 2x + C$$

$$F(-2) = 5 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + C = -23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 13 \Rightarrow F(x) = 5x^3 - 2x + 13$$
- $$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + C.$$

Como hay un máximo relativo en $x = -3$, entonces $f'(-3) = 0 \Rightarrow C = -9$ y es $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + K$$

y como $f(-3) = 17 \Rightarrow$
 $\Rightarrow K = -10 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10.$
 Inflexión: $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow I(-1, 1)$
 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \text{máximo}(-3, 17) \\ x_2 = 1, \text{mínimo}(1, -15) \end{cases}$
 Punto de corte con el eje Y: $P(0, -10)$
- $$v = \int a dt = \int -10 dt = -10t + C,$$

$$v(2) = 15 \Rightarrow C = 35$$

$$s = \int v dt = \int (-10t + 35) dt = -5t^2 + 35t + k$$

$$s(2) = 25 \Rightarrow -20 + 70 + K = 25 \Rightarrow K = -25$$
 - $v(t) = -10t + 35$ m/s
 - $v_0 = v(0) = 35$ m/s
 - $s(t) = -5t^2 + 35t - 25$ m
 - $s_0 = s(0) = -25$ m
 - $s(4) = 35$ m, $v(4) = -5$ m/s
- $I = 6 \ln|x+1| + C$
 - $I = -\frac{1}{x} + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + K$
 - $I = \ln|3 + \operatorname{sen} x| + K$
 - $I = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2+2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2+2} + C$
 - $I = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + C$
 - $I = \sqrt{x^2+1} + C$
- $$I = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x +$$

$$+ \int (1 - \cos^2 x) dx = \operatorname{sen} x \cos x + x - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C$$
 - $$I = x(\ln x)^3 - \int 3(\ln x)^2 dx$$

$$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + \int 6 \ln x dx =$$

$$= x[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6 \ln x + 6] + C$$
 - $$I = -x \cotg x + \int \cotg x dx =$$

$$= -x \cotg x + \ln|\operatorname{sen} x| + C$$
- $I = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$
 - $I = \int \left(2 - \frac{5}{x+2} \right) dx = 2x - 5 \ln|x+2| + C$
 - $$I = \int \frac{2x+2}{(x-1)^2} dx = \int \frac{2x-2+4}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} \right) dx = 2 \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C$$
- $$I = \int \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = \int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= 2 \ln|x+3| - \ln|x+1| + C$$
 - $$I = \int \frac{x+2-3}{(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} \right) dx =$$

$$= \ln|x+2| + 3(x+2)^{-1} + C$$
 - $$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4-6}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx -$$

$$- \int \frac{3}{1+(x+2)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) -$$

$$- 3 \operatorname{arctg}(x+2) + C$$
- $I = \int \left(2x - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = x^2 - \ln(x^2+1) + C$
 - $I = \int \frac{1}{4+(x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C$
 - $I = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x^2+1} \right) dx =$

$$= 3 \ln|x-1| + 4 \operatorname{arctg} x + C$$
- $I = \int [(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 1] dx = \operatorname{tg} x - x + C$
 - $$I = \int \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = 2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{sec} x - x + C$$
 - $I = \int \operatorname{sen}^{-2} x \cos x dx = -\operatorname{cosec} x + C$
- Si $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ y $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1+t^2}{2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = t + C = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + C$$
 - $$I = \frac{1}{4} \int (2 \operatorname{sen} x \cos x)^2 dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{sen}^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} \right) + C$$
 - $$I = \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx =$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C$$

Soluciones propuesta B

1. $F(x) = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$
 $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 1 + C = -2 \Rightarrow$
 $C = -3 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x - 3$
2. La función es $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + K$ porque su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 4x + 5$. Para hallar la constante K , se impone $f(1) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow K = -5$.
 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 5 \Rightarrow f(0) = -5$
3. a) De la gráfica: $v_0 = v(0) = 4$ m/s
 b) De la gráfica: $v(t) = 2t + 4$ m/s
 c) $s = \int v dt = \int (2t + 4) dt = t^2 + 4t + K$
 $s(4) = 50 \Rightarrow 16 + 16 + K = 50 \Rightarrow K = 18$
 $s(t) = t^2 + 4t + 18$ m
 d) $s_0 = s(0) = 18$ m
 e) $a = v'(t) = 2$ m/s²
4. a) $I = \int (10x + x^{\frac{1}{2}}) dx = 5x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + K$
 b) $I = \int (x^2 + 2x^{\frac{1}{3}}) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + K$
 c) $I = \ln|\operatorname{tg} x| + K$
 d) $I = \frac{1}{5}(e^x + 2)^5 + K$
 e) $I = \frac{5}{2}(\ln x)^2 + K$
 f) $I = \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+1} \right) dx =$
 $= \ln(x^2+1) + 5 \operatorname{arctg} x + K$
5. a) $I = x \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x}{1+4x^2} dx =$
 $= x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$
 b) $I = (x+1)e^x - \int e^x dx =$
 $= (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$
 c) $I = x \ln x^2 - \int 2 dx = x \ln x^2 - 2x + C$
6. a) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = 2 \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} =$
 $= 2 \ln|x-1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x+2} \right| + C$
 b) $I = \int \left(2 - \frac{7}{x+4} \right) dx = 2x - 7 \ln|x+4| + C$
 c) $I = \int \frac{x+1+1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx =$
 $= \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$
7. a) $I = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-4} dx =$
 $= -\frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{3}{2} \ln|x-4| + C$
 b) $I = \int \frac{x-3+2}{(x-3)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} \right) dx =$
 $= \ln|x-3| - \frac{2}{x-3} + C$
 c) $I = \frac{1}{2} \int \frac{2x-6+4}{x^2-6x+10} dx =$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} dx + \int \frac{2}{1+(x-3)^2} dx =$
 $= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+10) + 2 \operatorname{arctg}(x-3) + C$
8. a) $I = \int \left(2 + \frac{-8}{4+x^2} \right) dx = 2x - 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + C$
 b) $I = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+5} dx =$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + \int \frac{1}{4+(x-1)^2} dx =$
 $= \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+5) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C$
 c) $I = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx =$
 $= 3 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$
9. a) $I = \int \frac{\operatorname{sen}(5x-5) + \operatorname{sen}(x+5)}{2} dx =$
 $= -\frac{\cos(5x-5)}{10} - \frac{\cos(x+5)}{2} + C$
 b) $I = \int \frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx = -2(\cotg x + \operatorname{cosec} x) + C$
 c) $I = \int \frac{\cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^5 x} dx = \int \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^5 x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \right) dx =$
 $= -\frac{\operatorname{cosec}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2} + C$
10. a) Si $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ y $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$
 $I = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{-2}{1+t} + C = \frac{-2}{1+\operatorname{tg}(x/2)} + C$
 b) Haciendo $3^x = t, 3^x \ln 3 dx = dt$,
 $I = \frac{1}{2 \ln 3} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2 \ln 3} \ln \left| \frac{3^x-1}{3^x+1} \right| + C$
 c) Si $2x+1 = t^2 \Rightarrow 2dx = 2tdt$
 $I = \frac{t^3(3t^2-5)}{30} + C = \frac{3x-1}{15} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

14 Integral definida

Propuesta A

- Considera la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos de abscisas $-3, -2, -1, 0, 1$ y 2 .

 - Determina utilizando dicha partición una aproximación por exceso y otra por defecto al área encerrada entre la curva de f y el eje X .
 - Obtén el valor exacto del área anterior usando la regla de Barrow.
- Calcula las siguientes integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y señala cuáles de ellas representan un área y cuáles no.

 - $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx$
 - $\int_0^2 (2x - 1) \, dx$
 - $\int_1^e \ln x \, dx$
- Demuestra que $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.
- Halla los máximos y mínimos relativos, si es que existen, de la función $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+2\cos t} \, dt$.
- Calcula los valores de a y de b que hacen continua las siguientes funciones en todo \mathbf{R} y determina para los valores hallados $\int_0^5 [f(x) - g(x)] \, dx$.

 - $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$
 - $g(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
- Calcula las integrales definidas siguientes y justifica si representan un área o no.

 - $\int_0^4 |2x - 4| \, dx$
 - $\int_0^4 \sqrt{x^2 - 4x + 4} \, dx$
 - $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} \, dx$
- Representa y calcula el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $y = 2x - x^2$.
- La gráfica de la función $y = \ln x$, la recta $y = 1$ y los ejes de coordenadas delimitan un recinto con forma de trapecio mixtilíneo. Determina:

 - El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable x .
 - El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable y .
 - El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje X .
 - El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje Y .
- Sea el recinto acotado y limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, las rectas $x = 1$, $x = -1$ y el eje X .

 - Determina el área del recinto.
 - Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje X .
 - Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje Y .
- Se considera la función $y = 2 \ln x$ definida para valores de $x \in [1, e]$. Determina:

 - La longitud del arco de curva.
 - El área del recinto limitado por el arco y su cuerda.

Propuesta B

1. Sea la función $y = \frac{2}{x+1}$ definida en el intervalo $[2, 4]$, en el que se toma una partición P dividiéndolo en cuatro partes iguales.
 - a) Obtén el área encerrada por la curva de f y el eje X en el intervalo usando la regla de Barrow.
 - b) Determina una aproximación por exceso y otra por defecto al área anterior usando la partición P .

2. Calcula las integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y justifica cuáles de ellas representan un área y cuáles no.
 - a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$
 - b) $\int_{-2}^2 (2x+2) \, dx$
 - c) $\int_{-1}^1 e^{-x} \, dx$

3. Determina para qué valores de los parámetros a y b la función $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x+9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ es continua en toda la recta real. Para los valores obtenidos calcula $\int_{-\pi}^6 f(x) \, dx$.

4. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \int_0^x t^2 \ln(1+4t^3) \, dt$.

5. Halla la derivada de la función $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sin t} \, dt$.

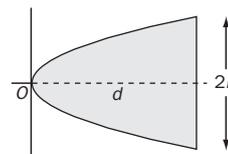
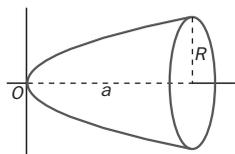
6. Calcula las siguientes integrales definidas y justifica si representan un área o no.
 - a) $\int_0^4 |x-4| \, dx$
 - b) $\int_0^3 \sqrt{x^2-2x+1} \, dx$
 - c) $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} \, dx$

7. Representa y calcula el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$.

8. La gráfica de la función $y = \arctg x$, la recta $y = \frac{\pi}{4}$ y el eje Y delimitan un recinto con forma de triángulo mixtilíneo. Determina:
 - a) El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable x .
 - b) El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable y .
 - c) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje Y .

9. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje X , el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x \sin x}$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, \pi]$.

10.
 - a) Calcula por integración el volumen de un paraboloide de altura a y radio de la base R .
 - b) Calcula el área del recinto plano limitado por una parábola y una cuerda de la parábola de longitud $2L$ perpendicular a su eje y a una distancia d del vértice.



Soluciones propuesta A

1. a) $S = 1 \cdot (f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(1) + f(2)) = 10 + 5 + 2 + 2 + 5 = 24$

$s = 1 \cdot (f(-2) + f(-1) + f(0) + f(0) + f(1)) = 11$

b) $A = \int_{-3}^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-3}^2 = \frac{50}{3} u^2$

2. a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin \pi - \sin(-\pi) = 0$

b) $\int_0^2 (2x - 1) dx = [x^2 - x]_0^2 = 4 - 2 = 2$

c) $\int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (-1) = 1$

Solamente en el caso c la integral representa un área porque en los otros casos la función no es positiva en todo el intervalo de integración.

3. El máximo de $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ es $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Por tanto, $f(x) \leq \frac{3}{2}$ en $(0, 1) \Rightarrow$

$\frac{1}{f(x)} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx \geq \int_0^1 \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3}$

4. Por el teorema fundamental del cálculo, será $F'(x) = \frac{1}{1+2\cos x} \neq 0$ para cualquier valor de x , por lo que F no tiene extremos relativos.

5. a) $f(1) = a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + b) = 9 + b$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (4x + 1) = 13 = 9 + b \Rightarrow b = 4$

Así, $\int_0^5 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^3 (x - 3 - x^2) dx + \int_3^5 (-3x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^3 + \left[-\frac{3x^2}{2} \right]_3^5 = -\frac{75}{2}$

6. a) $\int_0^4 |2x - 4| dx = \int_0^2 (-2x + 4) dx + \int_2^4 (2x - 4) dx = [-x^2 + 4x]_0^2 + [x^2 - 4x]_2^4 = 4 - (-4) = 8$

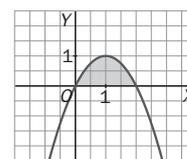
b) $\int_0^4 \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx = \int_0^4 \sqrt{(x-2)^2} dx = \int_0^2 |x-2| dx + \int_2^4 (x-2) dx = \int_0^2 (2-x) dx + \int_2^4 (x-2) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 = 2 + (0+2) = 4$

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx =$

$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(0+1) = 2$

Todas representan un área: las funciones son positivas en el intervalo de integración.

7. La parábola corta al eje de abscisas en los puntos $x = 0$ y $x = 2$, y es continua y positiva en este intervalo.

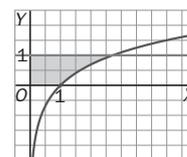


Por tanto:

$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3} u^2$

8. a) $A = 1 + \int_1^e (1 - \ln x) dx =$

$= 1 + [x(2 - \ln x)]_1^e = 1 + (e - 2) = e - 1 u^2$



b) $A = \int_0^1 e^y dy = [e^y]_0^1 = e - 1 u^2$

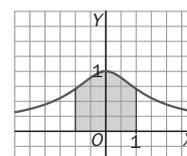
c) $V = \pi \int_0^e t^2 dx - \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi e - \pi [x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)]_1^e = 2\pi u^3$

d) $V = \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy = \frac{\pi}{2} [e^{2y}]_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2} u^3$

9. a) $A = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Se toma: $x = \operatorname{tg} t$

$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\sec t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec t (\sec t + \operatorname{tg} t)}{\sec t + \operatorname{tg} t} dt = 2 [\ln(\sec t + \operatorname{tg} t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(\ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 1) = 2(\ln(\sqrt{2} + 1))$



b) $V = \pi \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi [\arctg x]_{-1}^1 = \pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2} u^3$

c) Se despeja x en función de y : $x = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 1^2 dy + \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right) dy = \pi \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi \left[-\frac{1}{y} - y \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 2\pi(\sqrt{2} - 1) u^3$

10. a) $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx =$

$= \int_1^e \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$. Con el cambio $x^2 + 1 = t^2$

se llega a $L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{t^2}{t^2-1} dt \approx 2,0035$.

Soluciones propuesta B

1. a) $A = \int_2^4 \frac{2dx}{x+1} = 2[\ln|x+1|]_2^4 = 2\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 1,02$

b) $S = \frac{1}{4} \left(f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) \right) = \frac{275}{504}$

$s = \frac{1}{4} \left(f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4) \right) = \frac{1207}{2520}$

$S \approx 0,55; s \approx 0,479$

2. a) $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$

b) $\int_{-2}^2 (2x+2) dx = [x^2+2x]_{-2}^2 = 8$

c) $\int_{-1}^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$

La a y la c representan un área porque las dos funciones son positivas en el intervalo de integración, mientras que la b no.

3. a) Para que f sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$;

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = \sin 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + ax + b) = b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$

$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + ax) = 9 + 3a \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 9) = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 1$

b) $\int_{-\pi}^6 f(x) dx = \int_{-\pi}^0 \sin x dx + \int_0^3 (x^2 + x) dx + \int_3^6 (x+9) dx = [-\cos x]_{-\pi}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2} + 9x \right]_3^6 = -2 + 9 + \frac{9}{2} + \left(72 - \frac{9}{2} - 27 \right) = 52$

4. Llamando $F(x) = \int_0^x t^2 \ln(1+4t^2) dt$, hay que

calcular $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+4x^3)}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{10x(1+4x^3)} = \frac{4}{5}$

Se han aplicado la regla de L'Hôpital dos veces y el teorema fundamental del cálculo.

5. Aplicando el teorema fundamental del cálculo y teniendo en cuenta que los límites de integración son funciones de x ,

$F'(x) = \frac{1}{\sin x^2} \cdot 2x - \frac{1}{\sin x} \cdot 1 = \frac{2x}{\sin x^2} - \frac{1}{\sin x}$

6. a) $\int_0^4 |x-4| dx = \int_0^4 (4-x) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8$

b) $\int_0^3 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx = \int_0^3 |x-1| dx =$

$= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

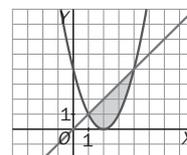
c) $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^\pi |\cos x| dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x) dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 1 + 1 = 2$

Las tres representan un área porque las funciones son positivas en el intervalo de integración.

7. Se hallan los puntos de corte entre f y g : $f(x) = g(x) \Rightarrow (1, 1), (4, 4)$

Al ser $g > f$ en $[1, 4]$, el área buscada es:



$A = \int_1^4 [x - (x^2 - 4x + 4)] dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 \approx 4,83 \text{ u}^2$

8. a) $A = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \arctg x \right) dx = \left[\frac{\pi}{4}x - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \approx 0,35 \text{ u}^2$

b) $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg } y dy = [-\ln(\cos y)]_0^{\frac{\pi}{4}} \approx 0,35 \text{ u}^2$

c) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2 y dy = \pi [\text{tg } y - y]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ u}^3$

9. $V = \pi \int_0^\pi (x \sin x) dx = \pi [-x \cos x + \sin x]_0^\pi = \pi^2 \text{ u}^3$

10. a) De acuerdo a la figura, la parábola que engendra el paraboloides es $y^2 = 2px$. Al pasar por $P(a, R) \Rightarrow 2p = \frac{R^2}{a} \Rightarrow y^2 = \frac{R^2}{a}x$

$V = \pi \int_0^a \left(\frac{R^2}{a}x \right) dx = \frac{\pi R^2}{a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{\pi R^2 a}{2}$

- b) En este caso la parábola es:

$y^2 = \frac{L^2}{d}x \Rightarrow y = \pm \frac{L}{\sqrt{d}}\sqrt{x}$ y el área:

$A = 2 \int_0^d \left(\frac{L}{\sqrt{d}}\sqrt{x} \right) dx = \frac{2L}{\sqrt{d}} \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^d = \frac{4}{3}Ld$